

Vorlesung 14

5.4 (Überblick über euklidische
Topologie) bis zum
Satz 5.4.5



Vom letzten Mal...

x

Es sei A eine nicht-leere Menge in $\mathbb{R}^n$, und x ein Punkt in $\mathbb{R}^n$. Der Punkt x ist ein

- **innerer Punkt von A** , falls eine offene Umgebung $U_\epsilon(x)$ von x existiert, die ganz in A liegt, d. h.

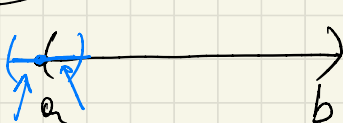
$$\exists \epsilon > 0, \text{ sodass } U_\epsilon(x) \subseteq A;$$

x innerer Punkt von $A \Rightarrow x \in A$

$A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, alle Punkte sind innere Punkte

- **Randpunkt von A** , wenn jede Umgebung $U_\epsilon(x)$ wenigstens einen Punkt mit A und einen Punkt mit $\mathbb{R}^n \setminus A$ gemeinsam hat, d. h.

$$\forall \epsilon > 0, \underbrace{U_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset} \text{ und } \underbrace{U_\epsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset}.$$



Randpunkte
von $A = (a, b)$
sind: $\{a, b\}$

- **äußerer Punkt von A** , falls x ein innerer Punkt des Komplementes ist, d. h.

$$\exists \epsilon > 0, \text{ sodass } \underbrace{U_\epsilon(x)} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus A};$$

x äußerer Punkt von $A \Rightarrow x \notin A$

$$A = (a, b)$$

Äußere Punkte: $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

Übung 5.4.1

Mit der Hilfe der gegebenen Definitionen beweisen Sie, dass für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gelten:

1. $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$;

2. $\mathring{A} \subseteq A$;

3. $A \subseteq \mathring{A} \cup \partial A$;

→ 4. $A \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A$ (wobei die letzte Vereinigung eine Vereinigung zwischen disjunkten Mengen ist);

3. $\mathbb{R}^n = \mathring{A} \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$, wobei diese Vereinigung eine Vereinigung zwischen disjunkten Mengen ist. ↗

$$A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$A = [a, b) \quad \partial A = \{a, b\}$$

$$a \in A$$

$\mathring{A} :=$ Menge der inneren Punkte von A

$\partial A :=$ // // Randpunkte von A

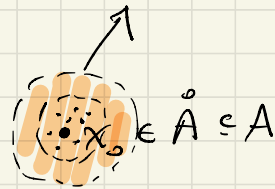
$(\mathbb{R}^n \setminus A) =$ Menge der äußeren Punkte

$$\left. \begin{aligned} A \subseteq \mathring{A} \cup \partial A &\iff A^c \supseteq (\mathring{A} \cup \partial A)^c = \\ &= (\mathbb{R}^n \setminus A) \\ \text{Bemk: } (\mathbb{R}^n \setminus A) &\subseteq \mathbb{R}^n \setminus A = A^c \end{aligned} \right\}$$

Beziehung zwischen: Häufungspunkten
isolierten Punkten
inneren oder Randpunkte

$HP(A) :=$ Menge der Häufungspunkte von A

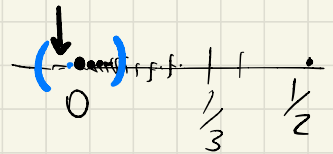
$$(1) \quad \underbrace{\mathring{A}} \subseteq \underbrace{HP(A)}_{x_0 \in \mathring{A} : \exists U_\varepsilon(x_0) \subseteq A}$$



$$(2) \quad \underbrace{HP(A) \subseteq \mathring{A}}_{\text{Nein, aber}} \quad \text{falls } x \text{ äußerer Punkt}$$

$$HP(A) \subseteq \mathring{A} \cup \partial A$$

$$\rightarrow A = \left\{ \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$



$$0 \in HP(A) \quad , \text{ aber } \underline{0 \in \partial A}$$

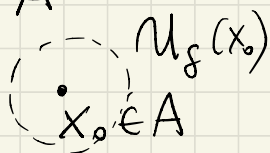
Def: A heißt diskret, falls $HP(A) = \emptyset$
 $\Rightarrow \forall x \in A, x$ isoliert

(3) Falls alle $x \in A$ isoliert sind $\Rightarrow$
 A diskret? Nein

$A = \left\{ \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ Jeder Punkt von A
ist isoliert

$\frac{1}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right) \cdot \frac{1}{n}$ aber $HP(A) = \{0\}$

(4) x_0 isoliert $\Rightarrow \underline{x_0 \in \partial A}$
 $x_0 \in A$



$U_g(x_0) \cap A = \{x_0\}$

$\Rightarrow \underline{U_g(x_0) \setminus \{x_0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A}$

(5) Ist es wahr, dass $\underline{HP(A) \subseteq \partial A}$? Nein

$\dot{A} \subseteq HP(A)$ aber $\dot{A} \cap \partial A = \emptyset$ (*)

(6) Ist es wahr, dass $\partial A \subseteq HP(A)$? Nein

(4) Isolierte Punkte sind Randpunkte
 x_0 isoliert $\Rightarrow x_0 \notin HP(A)$ (*)

Lemma 5.4.1: $HP(A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$
 $\forall A \neq \emptyset$

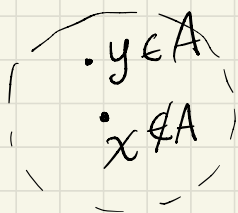
Beweis

$$(*) \quad HP(A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \subseteq \partial A$$

$$x \in HP(A), \quad x \notin A$$

↓

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left(\mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus \{x\} \right) \cap A \neq \emptyset$$



$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$$

enthält $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$

Punkte von A (y)

und Punkte von A^c (x)

$$\Rightarrow x \in \partial A$$

$$(*) \quad \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \subseteq HP(A)$$

$$x \in \partial A, \quad x \notin A$$

$$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x),$$

$$\left(\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in A \right)$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\boxed{x \in HP(A)}$$

↑

$y \neq x$



Definition 5.4.2

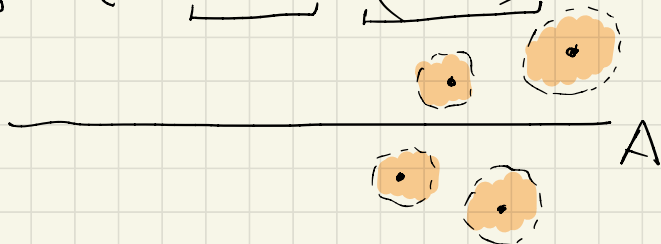
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, falls sie entweder leer ist, oder jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt ist oder, mit anderen Worten, falls $A = \overset{\circ}{A}$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiele:

- * $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ $\overset{\circ}{(a, b)} = (a, b) \Rightarrow (a, b)$ offen
- * $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$
offene Menge
- * $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ offen
- * $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ | $[a, b]$ abgeschlossen
A nicht offen
ist abgeschlossen

$$(A \text{ abg.} : \Leftrightarrow \underline{\mathbb{R} \setminus A} = \underline{(\mathbb{R} \setminus A)})$$



* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}, \quad \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset \quad \left| \quad \overset{\circ}{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{Q} \right.$$

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset \quad \left| \quad \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \right.$$

nicht offen

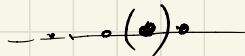
$$* U_R(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < R\}$$



$U_R(x)$ offen
(heißt
"offene Umgebung"
von x)

$$* A = \left\{ \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ist A offen? Nein

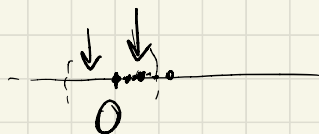


A ist nicht
offen

Ist A abgeschlossen?

A abg. $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A$ offen ...

Ist $\mathbb{R} \setminus A = (\mathbb{R} \setminus A)$



$0 \notin A$ $0 \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow 0 \in \partial A = \partial(\mathbb{R} \setminus A)$
 A nicht abgeschlossen

Lemma 5.4.2

Es sei A eine nicht leere Menge von $\mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden äquivalent:

- (i) A ist offen;
- (ii) A ist die Vereinigung von offenen Mengen;
- (iii) $A \cap \partial A = \emptyset$.

Beweis

$$(i) \iff (ii)$$

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

$$(i) \quad A \text{ offen} \iff A = \overset{\circ}{A} \quad : \quad \forall x \in A, \exists \delta = \delta(x) :$$

$$\underbrace{U_\delta(x)} \subseteq \underbrace{A}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bigcup_{x \in A} U_\delta(x)} \subseteq A$$

$$\text{Worum ist dann } A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_\delta(x) ?$$

$$A = \bigcup_{x \in A} \underbrace{\{x\}}_{\{x\} \subseteq U_\delta(x)} \subseteq \bigcup_{x \in A} U_\delta(x)$$

$$\text{Also } A = \bigcup_{x \in A} U_\delta(x) \Leftarrow \Rightarrow (ii) \quad \checkmark$$

$$\boxed{U_\delta(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < \delta\} \text{ sind offene Mengen}}$$

(ii) A Vereinigung offener Mengen
 $\Rightarrow A$ offen

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A_i \text{ offen}$$

$$\text{d.h. } \forall i \in I, A_i = \overset{\circ}{A}_i$$

Für $x \in A$ $\Rightarrow \exists i \in I$, sodass $x \in A_i$

Weil A_i offen ist $\Rightarrow \exists \mathcal{U}_\varepsilon(x)$:

$$\underbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(x)} \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i = \underbrace{A}$$

$$\Rightarrow x \text{ inner Punkt von } A \Rightarrow A = \overset{\circ}{A}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \iff \text{(iii)} \\ A \text{ offen} & A \cap \partial A = \emptyset \end{array}$$

$$(i) \Rightarrow (iii) \quad A \text{ offen} : \iff A = \overset{\circ}{A}$$

$$\text{und } \overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset \} \Rightarrow A \cap \partial A = \emptyset$$

also $A = \overset{\circ}{A}$

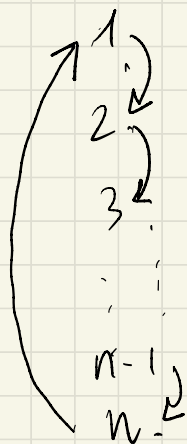
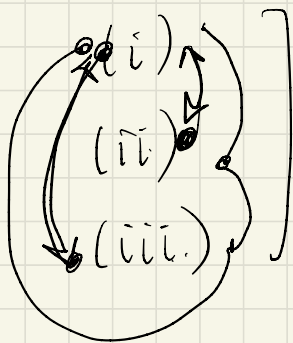
$$(i \bar{i} i) \Rightarrow (i)$$

$$A \cap \partial A = \emptyset \Rightarrow A \text{ offen?}$$

A beliebig

$$A \subseteq \overset{\circ}{A} \cup \partial A \text{ (Übung)}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A \subseteq \overset{\circ}{A} \\ \overset{\circ}{A} \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A = \overset{\circ}{A} \downarrow A \text{ offen}$$



n Duplikation

Lemma 5.4.3

Es sei A eine nicht leere Menge von $\mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden äquivalent:

- (i) A ist abgeschlossen;
- (ii) $A = \mathring{A} \cup \partial A$.
- (iii) $\partial A \subseteq A$;
- (iv) $HP(A) \subseteq A$.

Beweis

$$(i) \iff (iii)$$

$$(i) \Rightarrow (iii) \quad A = \mathring{A} \cup \partial A \Rightarrow \partial A \subseteq A$$

$$(iii) \Rightarrow (i) \quad \left. \begin{array}{l} \text{falls } \partial A \subseteq A \\ \text{immer } \mathring{A} \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow \partial A \cup \mathring{A} \subseteq A \quad (1)$$

$$(\text{Übung:}) \quad A \subseteq \partial A \cup \mathring{A} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow A = \partial A \cup \mathring{A}$$

$$(i) \iff (ii)$$

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

$$A \text{ abgeschlossen} \iff \mathbb{R}^n \setminus A \text{ offen} \iff \mathbb{R}^n \setminus A = (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$$

$$\mathbb{R}^n \setminus A = (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ \quad (*)$$

Wir wissen (Übung)

$$\mathbb{R}^n = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$$

Disjunkt!

$$\Rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$$

$$\text{Nach } (*) \Rightarrow \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ}_{\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)}_{\underline{\underline{\overset{\circ}{A}}}}$$

$$(ii) \Rightarrow (i) \quad \downarrow \quad A = \tilde{A} \cup \partial A \quad A \text{ abgeschlossen} \quad \left[\begin{array}{l} (i) \\ (ii) \\ (iii) \\ (iv) \end{array} \right]$$

$$\text{Aus } \tilde{A} \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A = (\mathbb{R}^n \setminus A) \text{ oder, mit anderen Worten, } \mathbb{R}^n \setminus A \text{ offen}$$

$$\Rightarrow A \text{ abgeschlossen}$$

$$(iii) \Leftrightarrow (iv)$$

$$\partial A \subseteq A \Leftrightarrow \text{HP}(A) \subseteq A$$

$$\underline{\text{Lemma 5.4.1}} : \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \text{HP}(A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$$

$$\partial A \subseteq A \Leftrightarrow \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset \stackrel{\text{Lemma 5.4.1}}{\Leftrightarrow} \text{HP}(A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset \Leftrightarrow \text{HP}(A) \subseteq A$$



Lemma 5.4.4

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen genau dann, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ in A liegt.

Beweis

" $\Rightarrow$ "

A abgeschlossen. Lemma 5.4.3 $\Rightarrow$

$$HP(A) \subseteq A$$

$$(a_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}^n$$

Zu beweisen: $l \in A$

• $l \in A$ ✓

• Angenommen $\downarrow$ $l \notin A$. Wir sollten einen Widerspruch erhalten.

Wir beweisen, dass $l \in HP(A)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0$$

$$|a_n - l| < \varepsilon$$



Da $l \notin A$, ist $(a_n) \neq l$ ✓
 $\forall n \in \mathbb{N}$. Da $a_n \in A \quad \forall n$

$\Rightarrow l$ Häufungspunkt für A ist
Nach Voraussetzung, A abgeschlossen

$$\Rightarrow HP(A) \subseteq A \text{ aber } l \notin A$$

Lemma 5.4.3.

“ $\Leftarrow$ ”

Es sei $(x_0 \in \partial A)$. Zu beweisen, dass

$$x_0 \in \overline{A}, \text{ d.h. } \partial A \subseteq \overline{A}$$

$\Rightarrow A$ abgeschlossen

Lemma 5.4.3

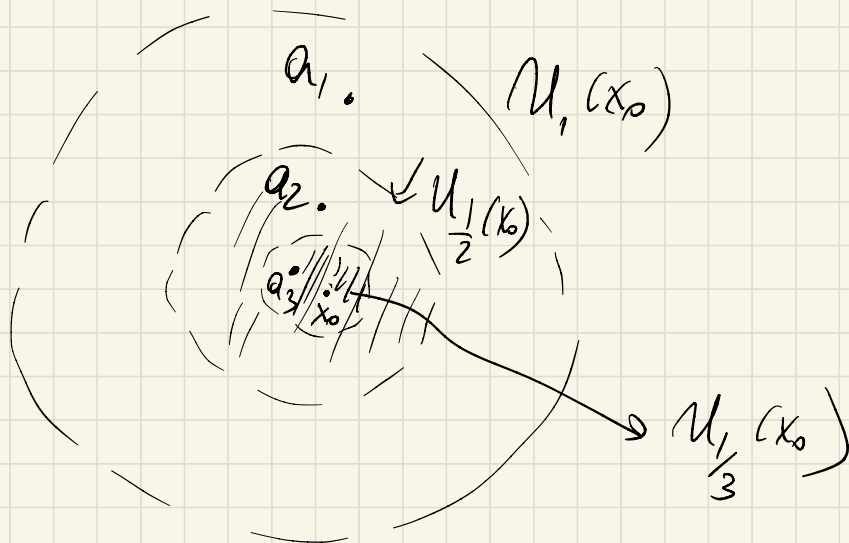
Wir bilden eine Folge (a_n) , die nach $\underline{x_0}$ konvergiert. Nach Voraussetzung $\underline{x_0 \in A}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, enthält $U_{\frac{1}{n}}(x_0)$ einen Punkt von A : nennen wir diesen Punkt a_n : $a_n \in A \cap U_{\frac{1}{n}}(x_0)$

Bwk: $U_{\frac{1}{n'}}(x_0) \subseteq U_{\frac{1}{n}}(x_0)$

$\forall n' \geq n \quad (\text{weil } \frac{1}{n'} \leq \frac{1}{n})$

D.h.



$a_{n'} \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) \quad \forall n' \geq n$

(weil $a_{n'} \in U_{\frac{1}{n'}}(x_0) \subseteq U_{\frac{1}{n}}(x_0), \forall n' \geq n$)

$\Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \Rightarrow x_0 \in A$
nach Voraussetzung



$\mathcal{T}$: Menge der offenen Mengen von $\mathbb{R}^n$
 $\hookrightarrow$ die euklidische Topologie von $\mathbb{R}^n$

Satz 5.4.5 (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$;

(ii) Gegeben eine beliebige (nicht unbedingt endliche) Familie von offenen Mengen $\{A_i \in \mathcal{T}, i \in I\}$, dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$;

(iii) Gegeben eine endliche Familie von offenen Mengen $\{A_j, j \in J\}$ mit $|J| = k \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$.

Beweis

(i) $\emptyset$ offen per def.
 $\mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)$

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen?

$\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i : x \in A_i$

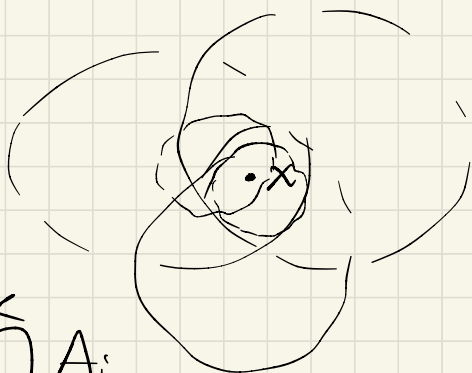
A_i offen, d.h. $\exists U_\varepsilon(x) : U_\varepsilon(x) \subseteq A_i$

$\Rightarrow U_\varepsilon(x) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow x$ ist ein inner Punkt von $\bigcup_{i \in I} A_i$

$$(iii) \quad A = A_1 \cap A_2 \dots \cap A_k$$

A_i offen $\forall i=1, \dots, k$

Zu beweisen: A offen.



$$\underline{x \in A_i \quad \forall i} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$$

$\hookrightarrow$ Jede A_i offen $\Rightarrow$

$$\exists R_i > 0 : \mathcal{U}_{R_i}(x) \subseteq A_i \quad \forall i=1 \dots k$$

Problem: $\mathcal{U}_{R_i}(x)$ könnte nicht in A_j enthalten sein, $j \neq i$

$$R := \underline{\min}_{R_i > 0} \{ \underline{R_1, R_2, \dots, R_k} \} > 0$$

$$\mathcal{U}_R(x) \subseteq \mathcal{U}_{R_i}(x) \quad \forall i=1 \dots k \Rightarrow$$

$$\text{Da } \underbrace{U_R(x)} \subseteq U_{R_i}(x) \subseteq \underbrace{A_i}_{=1, \dots, k} \quad \forall i =$$

$$\Rightarrow U_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^k A_i$$

$\Rightarrow x$ ist ein ~~Innerpunkt~~ des Schnittes



Bmk :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right) = \{0\}$$

nicht
offen
in $\mathbb{R}$!

Satz 5.4.6 (i) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$;

(ii) Gegeben eine beliebige (nicht unbedingt endliche) Familie von abgeschlossenen Mengen $\{A_i, i \in I\}$, dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen;

(iii) Gegeben eine endliche Familie von abgeschlossenen Mengen $\{A_j, j \in J\}$ mit $|J| = k \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcup_{j \in J} A_j$ abgeschlossen.

Bmk :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1 + \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1} \right]$$