Vorlesung 25

Vom letzten Mal...

Satz 9.1.2
Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es eine Folge von Zerlegungen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) \;=\; \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

Zudem, wenn es eine solche Folge von Zerlegungen gibt, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty} O(Z_n, f).$$

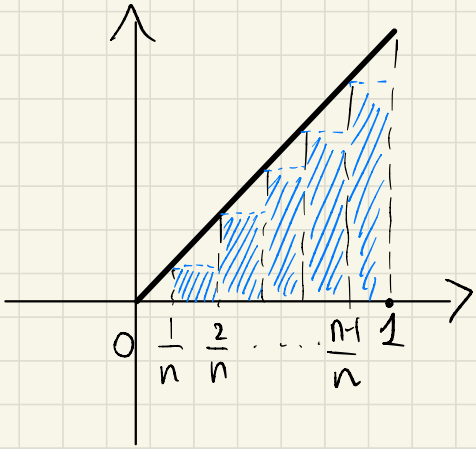
Korollar 9.1.3
(***Riemannsches Integrabilitätskriterium***)
Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$ gibt, so dass

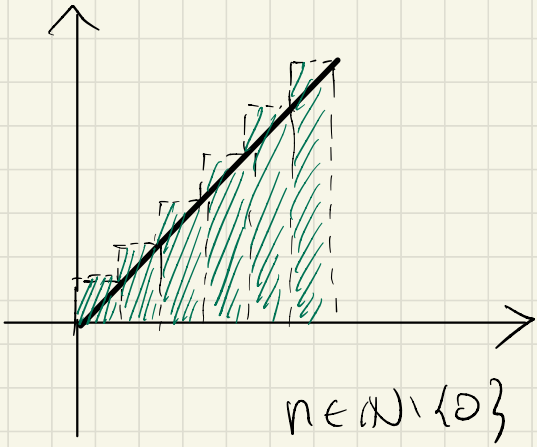
$$O(Z,f) - U(Z,f) \;<\; \epsilon.$$

Beispiel: 1) $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x$$

Wir möchten beweisen (mit Satz 9.1.2) dass f <u>integrierbar</u> ist





$$Z_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

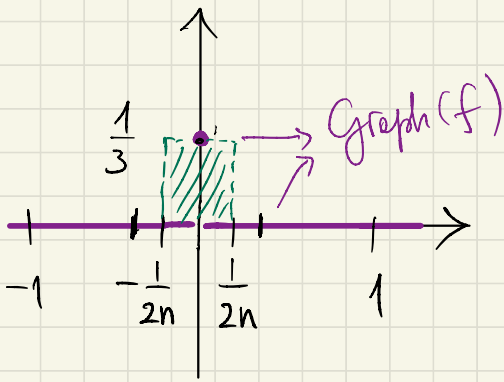
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{U}(Z_n, f) &= \frac{n-1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} \\ \mathcal{O}(Z_n, f) &= \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \overset{\text{Satz 9.1.2}}{\Longrightarrow} f \text{ integrierbar ist mit}$$

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

2) Muss eine integrierbare Funktion stetig sein? **Nein**

$$f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \frac{1}{3} & x = 0 \end{cases}$$



$$Z_n = \left\{-1, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, 1\right\}$$

$$U(Z_n, f) = 0$$

$$O(Z_n, f) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2n} - \left(-\frac{1}{2n}\right)\right) = \frac{1}{3n} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$$

Satz 9.1.4
Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$ und $\lambda \cdot f$ integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)+g(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b \lambda \cdot f(x)dx &= \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Wir müssen zunächst das folgende Lemma beweisen:

Lemma 9.1.5
Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt, dass

$$U(Z,f)+U(Z,g) \leq U(Z,f+g)$$

sowie

$$O(Z,f+g) \leq O(Z,f)+O(Z,g).$$

<u>Beweis</u> (des Lemmas)

Wir beweisen zunächst, dass

(1) $\inf(f([c,d])) + \inf(g([c,d])) \leq \inf((f+g)([c,d]))$

Es genügt zu beweisen, dass

(2) $\inf(f([c,d])) + \inf(g([c,d])) \leq (f+g)(x), \forall x \in [c,d]$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Zu zeigen:

(2) $\inf(f([c,d])) + \inf(g([c,d])) \leq (f+g)(x), \forall x \in [c,d]$

$$\inf(f([c,d])) \leq f(x) \quad \forall x \in [c,d]$$
$$\inf(g([c,d])) \leq g(x) \quad \forall x \in [c,d]$$

$$\Downarrow$$

$$\inf(f[c,d]) + \inf(g[c,d]) \leq (f+g)(x) \quad \forall x \in [c,d]$$

Wir benutzen:

(1) $\inf(f([c,d])) + \inf(g([c,d])) \leq \inf((f+g)([c,d]))$

um zu beweisen, dass

$$\mathcal{U}(Z,f) + \mathcal{U}(Z,g) \leq \mathcal{U}(Z, f+g)$$

Z Zerlegung von $[a,b]$

$$\mathcal{U}(Z,f) + \mathcal{U}(Z,g) = \sum_{j=0}^{k-1} (z_{k+1} - z_k)\left[\inf(f[z_k, z_{k+1}]) + \inf(g[z_k, z_{k+1}])\right] \leq$$

$$\underset{(1)}{\leq} \sum_{j=0}^{k-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \inf((f+g)[z_k, z_{k+1}]) =$$

$$= \mathcal{U}(Z, f+g)$$

Ähnlich beweist man, dass

$$\vartheta(Z, f+g) \leq \vartheta(Z, f) + \vartheta(Z, g)$$

<u>Beweis</u> (des Satzes 9.1.4)

f, g integrierbar $\xRightarrow[\text{zu zeigen}]{}$ (i) $\underline{f+g \text{ integrierbar}}$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx =$

$$= \underline{\int_a^b f(x)\,dx} + \underline{\int_a^b g(x)\,dx}$$

<u>Satz 9.1.2.</u> : (*) f integrierbar $\Rightarrow \exists\, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

X_n Zerlegung von $[a,b]$, sodass

$$\lim_{n\to+\infty} U(X_n, f) = \lim_{n\to+\infty} \vartheta(X_n, f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(*) g integrierbar $\overset{\text{Satz 9.1.2.}}{\Longrightarrow} \exists\, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Y_n Zerl. $[a,b]$

$$\lim_{n\to+\infty} U(Y_n, g) = \lim_{n\to+\infty} \vartheta(Y_n, g) = \int_a^b g(x)\,dx$$

Wir beweisen, dass

$$\lim_{n\to+\infty} U(X_n \cup Y_n, f+g) = \lim_{n\to+\infty} O(X_n \cup Y_n, f+g)$$

$\Downarrow$ (i) $\rightsquigarrow$ Satz 9.1.2.

und

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad (\Rightarrow \text{(ii)})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} U(X_n, f)} + \lim_{n\to+\infty} U(Y_n, g) \leq$$

$$\underset{\text{(Lemma 9.1.1.1.)}}{\leq} \lim_{n\to+\infty} U(\underbrace{X_n \cup Y_n}, f) + \lim_{n\to+\infty} U(X_n \cup Y_n, g) \leq$$

$$\underset{\text{Lemma 9.1.5.}}{\leq} \boxed{\lim_{n\to+\infty} U(X_n \cup Y_n, f+g)} \underset{\text{Lemma 9.1.1.2.}}{\leq}$$

$$\leq \boxed{\lim_{n\to+\infty} O(X_n \cup Y_n, f+g)} \underset{\text{Lemma 9.1.5}}{\leq} \lim O(X_n \cup Y_n, f) + \lim O(X_n \cup Y_n, g)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} O(X_n \cup Y_n, f) + \lim O(X_n \cup Y_n, g) \leq$$

$$\leq \lim O(X_n, f) + \lim O(Y_n, g) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Deshalb sind alle $\leq \rightsquigarrow =$

und insbesonder

$$\lim U(X_n \cup Y_n, f+g) = \lim O(X_n \cup Y_n, f+g)$$

$\Rightarrow$ Integrierbarkeit von $f+g$

und $\Rightarrow$ $= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

$\Rightarrow$ (ii) $\left(\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g \right)$

(2) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ $\blacksquare$

f integrierbar $\Rightarrow$ λf integrierbar $\int \lambda f = \lambda \int f$

Übung

Korollar 9.1.6
Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und es sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche sich von f nur in endlich vielen Punkten unterscheidet. Dann ist g ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis

$h(x) := g(x) - f(x)$

$x_1 \dots x_N$:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [a,b] \setminus \{x_1, \dots, x_N\} \\ g(x) - f(x) \neq 0 & \forall x \in \{x_1, \dots, x_N\} \end{cases}$$

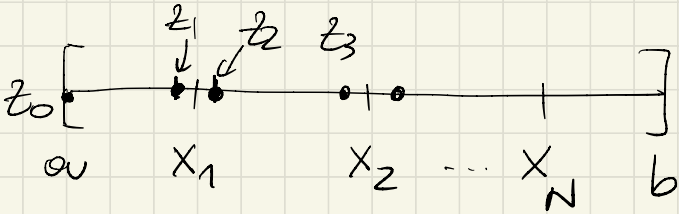
Wir möchten beweisen, dass

$$\boxed{\int_a^b h(x)\, dx = 0}$$

$$\Big[g(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{integr.}} + \underbrace{h(x)}_{\text{integr.}} \quad (\text{Satz } 9.1.4) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ g integrierbar, mit

$$\underbrace{\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)}\, + \underline{\underline{0}}$$



$z_0 = a$

$z_1 = x_1 - \frac{1}{n}$ $\quad$ n groß genug $\quad$ $(z_n)_{n \geq N}$

$z_2 = x_1 + \frac{1}{n}$ $\quad$ $z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < \dots < z_N = b$

$z_3 = x_2 - \frac{1}{n}$

$z_4 = x_2 + \frac{1}{n}$

$\vdots$

Zu beweisen

$$\left.\begin{cases} \mathcal{U}(z_n, h) = 0 \\ \mathcal{O}(z_n, h) \longrightarrow 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \int_a^b h(x)\,dx = 0$$

$\square$

Lemma 9.1.7
(Monotonieeigenschaft des Integrals) *Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen, so dass $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

<u>Beweis</u>: Es genügt zu bemerken, dass

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall \; x \in [a,b] \Rightarrow$$

$$\inf(f([c,d])) \leq \inf(g[c,d])$$

$$\forall [c,d] \subseteq [a,b]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{U}(Z,f) \leq \mathcal{U}(Z,g)}$$

<u>Idee</u> Satz 9.1.2.

$$(Z_n) : \mathcal{U}(Z_n, f) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

$$(Z_n') : \mathcal{U}(Z_n', g) \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$$

<u>Bmk</u>

$$\mathcal{U}(Z_n, f) \leq \mathcal{U}(Z_n \cup Z_n', f) \leq \sup\{\mathcal{U}(Z,f)\}$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}(Z_n, f) \leq \lim_{n\to+\infty} \mathcal{U}(Z_n \cup Z_n', f) \leq \underbrace{\sup\{\mathcal{U}(Z,f)\}}_{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n \to +\infty} \mathcal{U}(Z_n \cup Z_n', g) = \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{U}(Z_n \cup Z_n', f) \leq \mathcal{U}(Z_n \cup Z_n', g)$$

$$\downarrow \underline{n \to +\infty} \qquad\qquad \downarrow \underline{n \to +\infty}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$\blacksquare$

Lemma 9.1.8

Es sei $a < b < c$ und $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\int_a^c f(x)dx \;=\; \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

wenn die beiden Integrale auf der rechten Seite existieren.

Beweis

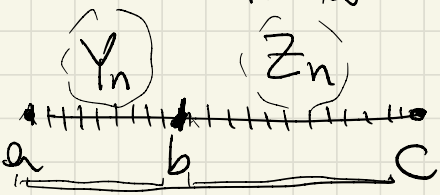
Satz 9.1.2 (*) $\exists \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \exists\, (Y_n)$ Zerl. von $[a,b]$

$$\lim_{n\to+\infty} U(Y_n, f) = \lim_{n\to+\infty} O(Y_n, f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(*) $\exists \int_b^c f(x)\,dx \Rightarrow \exists\, (Z_n)_n$ Zerl. von $[b,c]$

$$\lim_{n\to+\infty} U(Z_n, f) = \lim_{n\to+\infty} O(Z_n, f) = \int_b^c f(x)\,dx$$

Bmk



$\Rightarrow Y_n \cup Z_n$ Zerlegung von $[a,c]$

Dazu: $\rightarrow U(Y_n \cup Z_n, f) = U(Y_n, f) + U(Z_n, f)$

$\rightarrow O(\quad '' \quad '') = O(\;''\;) + O(\;''\;)$

Zu beweisen:

$$\lim_{n\to+\infty} U(Y_n \cup Z_n, f) \overset{\circledast}{=} \lim_{n\to+\infty} O(Y_n \cup Z_n, f) =$$

$\Rightarrow f$ integr. in $[a,c]$

und

$$\overset{\circledast}{=} \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx =$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} U(Y_n, f) +$$

$$+ \lim_{n\to+\infty} U(Z_n, f) = \lim_{n\to+\infty} U(Y_n \cup Z_n, f) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} O(Y_n \cup Z_n, f) = \lim_{n\to+\infty} O(Y_n, f) +$$

$$+ \lim_{n\to+\infty} O(Z_n, f) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$\blacksquare$

Wir haben $\int_a^b f(x)\,dx$ definiert ... nur falls

$a < b$ $\qquad [a,b]$

- Falls $\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}$ existiert $(a<b)$,

definieren wir

$$(*) \quad \underbrace{\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{und}} \quad \text{für } \underline{b>a}$$

$$(**) \quad \int_a^a f(x)\,dx := \underline{0}$$

Korollar 9.1.9

Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für beliebige $a, b, c \in I$ gilt, dass

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

wenn alle drei Integrale existieren.

<u>Beweis</u> **Übung** (Lemma 9.1.8 und Definition $(*)$, $(**)$)

9.2 Integrabilitätskriterien

(Korollar 9.1.3): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

f integrierbar $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists Z$ Zerl. von $[a,b]$ sodass

$$\mathcal{O}(Z,f) - \mathcal{U}(Z,f) < \varepsilon \qquad (*)$$

Wir möchten $(*)$ umschreiben

- Es sei, für $[r,s] \subseteq [a,b]$

$$d(f,[r,s]) := \sup\{|f(x) - f(x')|,\ x, x' \in [r,s]\}$$

"die größte Oszillation" von f in $[r,s]$

Zu zeigen:

$$\mathcal{O}(Z,f) - \mathcal{U}(Z,f) = \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot \underline{d(f,[z_i,z_{i+1}])}$$

wobei $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$

$$\underline{\mathcal{O}(Z,f)} - \underbrace{\mathcal{U}(Z,f)} = \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot \left(\sup(f[z_i,z_{i+1}]) - \inf(f[z_i,z_{i+1}])\right)$$

$$\underset{\text{Übung}}{=} \underline{\sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i)\, d(f,[z_i,z_{i+1}])}$$

$\hookrightarrow$ $\sup(f[z_i,z_{i+1}]) - \inf(f[z_i,z_{i+1}])$

$= d(f,[z_i,z_{i+1}]) \quad \forall i = 0,\dots,n-1$

Also

$$\mathcal{O}(Z,f) - \mathcal{U}(Z,f) = \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i)\, d(f, [z_i, z_{i+1}])$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \max_{i=0\dots n-1} \{ d(f, [z_i, z_{i+1}]) \}$$

$$= \max_{i=0,\dots,n-1} \{ d(f, [z_i, z_{i+1}]) \} \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) =$$

$$= \max_{i=0,\dots,n-1} \{ d(f, [z_i, z_{i+1}]) \} \cdot (b-a)$$

Wir möchten beweisen, dass jede stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist

$\hookrightarrow$ gleichmäßige Stetigkeit

9.2.1. Gleichmäßige Stetigkeit

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f stetig in D ...?

f stetig in D $:\Longleftrightarrow$ $\forall x_0 \in D$, $f(x)$ stetig in x_0

$\Longleftrightarrow$

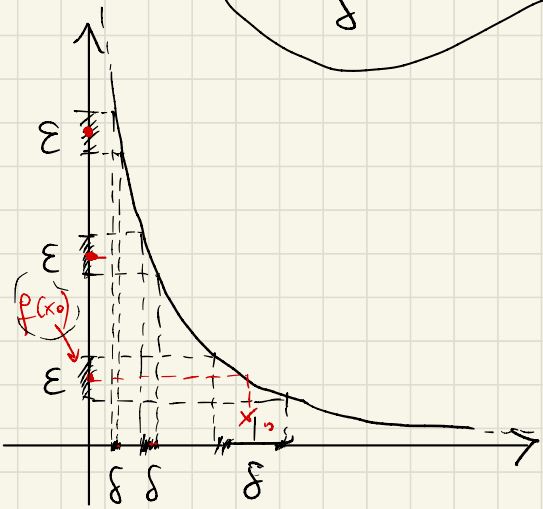
$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$, sodass

$\forall x \in U_\delta(x_0) \cap D$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

* Falls $\inf\limits_{x_0 \in D} \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \rightsquigarrow$ wir hätten ein gemeinsames $\tilde{\delta}$

$\tilde{\delta} :=$

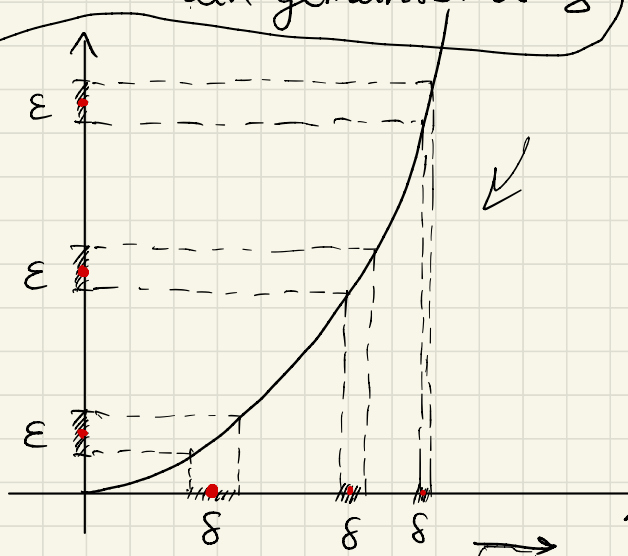
E.g.



$\xleftarrow{\delta \to 0}$

$x_0 \to 0$

$f(x) = \frac{1}{x}$ in $D = (0, +\infty)$



$f(x) = x^2$

$D = (0, +\infty)$

$\xrightarrow{\delta \to 0}$

$x_0 \to +\infty$

Für die <u>Gleichmäßige Stetigkeit</u>:

"wir müssen ein δ finden, welches für alle x_0 passt" (z.B. $\inf_{x_0} \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \rightsquigarrow \tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon)$)

Definition 9.2.1
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist **gleichmäßig stetig** in D, wenn

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ sodass } \forall x_0 \in D, \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap D, \text{ gilt } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,. \tag{9.2.2}$$

Übung 9.2.2 1. Beweisen Sie, dass jede lipschitzstetige Funktion (siehe Beispiel 5.2.1 (iv)) gleichmäßig stetig ist, wobei $f\colon D \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig ist (mit Konstanten L), falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|\,.$$

2. Es sei D ein offenes Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass falls

$$|f'(x)| \leq k \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{für alle } x \in D\,,$$

dann ist f lipschitzstetig und deshalb (durch 1. dieser Übung) gleichmäßig stetig.

3. Es sei $f \in C^1(0, +\infty)$ mit $\lim_{x\to 0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l' \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig in $(0, +\infty)$ ist, und deshalb gleichmäßig stetig.

♠

Satz 9.2.1
(Satz von Heine-Cantor) *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f stetig ist, dann ist f auch gleichmäßig stetig.*

Beweis

Def. (gl. st.):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D, \forall y \in D : \underbrace{|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$ ☆

Widerspruch:

Wir nehmen an, dass $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig ist. Was ist die Verneinung von ☆?

$$(*) \quad \exists \varepsilon > 0 : \forall \underline{\delta > 0}, \exists x, y \in [a,b] : \underline{|x-y| < \delta} \text{ und } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Es sei $\underline{\varepsilon > 0}$

$\delta = \frac{1}{n}$ $\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$(*) \Rightarrow \exists x_n \in [a,b]$ und $y_n \in [a,b]$:

$$\underbrace{|x_n - y_n| < \frac{1}{n}} \text{ und } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \underline{\varepsilon}$$

$\rightsquigarrow (x_n)_n, \quad (y_n)$ Folgen in $\underline{\underline{[a,b]}}$

<u>Bmk</u>: $[a,b]$ ist kompakt (beschränkt & abg.)

$\Rightarrow \exists (x_{n_k})_k : x_{n_k} \to c \in [a,b]$

$\exists (y_{n_k})_k : y_{n_k} \to c' \in [a,b]$

<u>Behauptung</u>: $c = c'$

weil $\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq \underbrace{(x_n - y_n)}_{\downarrow \atop 0} < \underset{\downarrow n \to +\infty \atop 0}{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} c \\ x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} c' \end{array} \right.$ und $(x_n - y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = c'$

$\lim\limits_{k \to +\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) \underset{\text{Satz } \underline{5.2.1}}{=} f(c) - f(c) = \underline{\underline{0}}$

$\rightsquigarrow$ Wir erhalten einen Widerspruch, weil

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \underline{\underline{\varepsilon}} > 0 \text{ (fest)}$$

und deshalb kann

$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})$ <u>nicht</u> gegen <u>Null</u> gehen.

$\blacksquare$

Satz 9.2.2
Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis

Korollar 9.1.3: f integrierbar $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists Z$
$$\mathcal{O}(Z,f) - \mathcal{U}(Z,f) < \varepsilon$$

(Wir haben schon bemerkt, dass

$$\mathcal{O}(Z,f) - \mathcal{U}(Z,f) \leq (b-a) \cdot \max_{i=0,\dots,n-1} \{ \underbrace{d(f,[z_i,z_{i+1}])}_{\sup\{|f(x)-f(x')| \; x,x' \in [z_i,z_{i+1}]\}} \}$$

$$Z = \{ \underset{a}{\underset{\shortparallel}{z_0}}, \dots, \underset{b}{\underset{\shortparallel}{z_n}} \}$$

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists Z$ von $[a,b]$, sodass

$$\cancel{(b-a)} \left[\max \{ d(f,[z_i,z_{i+1}]) \} < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \right]$$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\overset{\text{Satz 9.2.1.}}{\Longrightarrow}$ f gleichmäßig stetig:

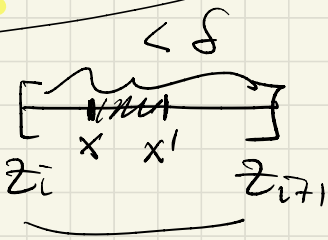
$\forall \eta>0\ \exists\, \delta=\delta(\eta):\ \forall x,x'\in[a,b],\ |x-x'|<\delta$

$$\Longrightarrow \underbrace{|f(x)-f(x')|<\eta}$$

Es sei $\eta=\dfrac{\varepsilon}{(b-a)}$

Wir wollen eine Zerlegung finden, sodass

$$\underbrace{(z_{i+1}-z_i)}_{\substack{x,x'\in[z_i,z_{i+1}]\\ |x-x'|<\delta}} < \delta=\delta(\eta) \quad (*)$$



$$\underbrace{\sup_{x,x'\in[z_i,z_{i+1}]}|f(x)-f(x')|}<\frac{\varepsilon}{(b-a)} \qquad \forall i$$

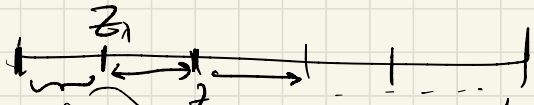
$$\Longrightarrow \max_{i=0,\dots,n-1}\left\{d(f,[z_i,z_{i+1}])\right\}<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Eine Zerlegung, die $(*)$ erfüllt, ist

$n\in\mathbb{N}:\ \underbrace{\dfrac{b-a}{n}}<\delta \qquad z_i=a+i\cdot\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$

$$z_i = a + i \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) \qquad i = 0, \dots, n$$

$$\frac{b-a}{n} < \delta$$



$$z_0 = a \quad \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$b = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\| \; z_n$$

$$z_0 = a$$

$$z_1 = a + \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$\blacksquare$