

Vorlesung 11

Von Bolzano-Weierstraß
bis Ende Kapitel 4

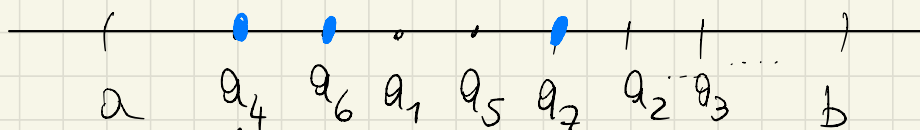


Satz 4.2.2 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und deshalb einen Häufungspunkt.

Idee : $b_n := \inf \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

Z. B. $[A_{n+1} \subseteq A_n \Rightarrow \inf(A_{n+1}) \geq \inf(A_n)]$



$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4$$

$$b_5 = b_6$$

$$b_7$$

$$a \leq a_n \leq b$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$

$(b_n)_n$ ist monoton steigend und

beschränkt $\Rightarrow$

$$b_n \rightarrow b = \sup \{b_n\}_{n \rightarrow +\infty}$$

* Wir haben die Def. von b_n benutzt
(b_n ist ein Infimum) :

$$b_{n_k} \leq a_{n_k} \leq b_{n_{k-1}} + \frac{1}{k}$$

Bwk

Satz von Bolzano-Weierstraß:

$\exists$ Häufungspunkte einer beschränkten Folge, sagt nicht was die Punkte sind!

z.B. : $a_n = \sin n$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

nur die Menge der Häufungspunkte
der Folge $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist
 $[-1, 1]$

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\{0\}$$

Korollar 4.2.3

Jede beschränkte komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und deshalb, einen Häufungspunkt.

Beweis

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n = x_n + i y_n, \quad x_n, y_n \in \mathbb{R}$$

* $(a_n) \rightarrow$ zwei reelle Folgen $(x_n), (y_n)$

* Bwk: $|a_n| < R \quad R > 0$

$$\downarrow$$
$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} |a_n| \geq |\operatorname{Re}(a_n)| = |x_n| \\ |a_n| \geq |\operatorname{Im}(a_n)| = |y_n| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \left[|a_n| < R \Rightarrow \begin{matrix} |x_n| < R \\ |y_n| < R \end{matrix} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right]$$

$\Rightarrow (x_n), (y_n)$ beschränkte reelle Folgen

(*) BW für (x_n) : $\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, sodass
 x_{n_k} konvergiert, $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}$

→ $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

↳ $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von (y_n)

Bwk: (y_n) beschränkt $\Rightarrow (y_{n_k})$ beschränkt

BW $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(y_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, die nach $y \in \mathbb{R}$ konvergiert

und deshalb, eine Teilfolge von (y_n)

$$y_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} y$$

$\Rightarrow (x_{n_{k_l}})$ ist eine Teilfolge der (Teil)folge (x_{n_k}) .

$$\text{Da } x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x \Rightarrow x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} x$$

Also

$$x_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} x$$

$$y_{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} y$$

$$\Rightarrow a_{n_{k_\ell}} \longrightarrow x + iy \text{ konvergiert}$$

$$\left[\begin{array}{l} a_n = x_n + iy_n \\ \Downarrow \\ \mathbb{C} \end{array} \right] a_n \xrightarrow{\quad} a \iff \left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Übung}$$

$\begin{matrix} x_n + iy_n \\ \parallel \\ x + iy \end{matrix}$

□

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ y_{n_1} = y_1 & & y_3 = y_{n_2} & & y_6 = y_{n_3} & & y_8 = y_{n_4} \\ n_1 = 1 & & n_2 = 3 & & n_3 = 6 & & n_4 = 8 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ y_{n_{k_1}} \Rightarrow k_1 = 1 & & & & y_{n_{k_2}} = y_{n_3} \Rightarrow k_2 = 3 & & \end{array}$$

$y_{n(k_1)}$

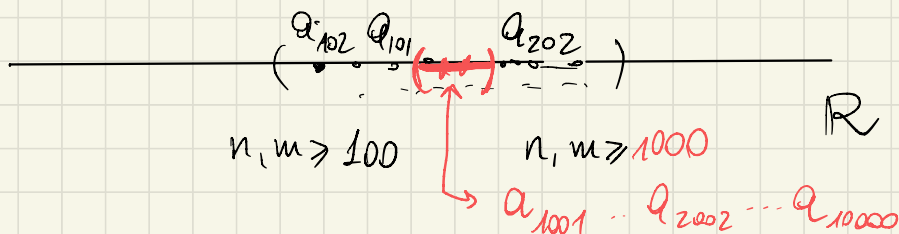
$y_{n(k_2)}$

$y_{n(k_3)} \dots$

Definition 4.2.3

Eine komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird **Cauchy-Folge** genannt, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon), \text{ sodass } |a_n - a_m| < \epsilon \text{ f\"ur alle } n, m \geq n_0. \quad (4.2.1)$$



Prop. (4.2.4) : Jede konvergente komplexe Folge ist eine Cauchy-folge

Beweis

Bwk : Prop 4.2.4 gilt f\"ur rationale Folgen

$$a_n \rightarrow l : \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon), \text{ sodass } \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - l + l - a_m| \leq \\ &\leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\ &\hookrightarrow \text{Dreiecksungleichung} \\ &\quad (|z| = |-z|) \end{aligned} \quad \forall n, m \geq n_0$$

Satz 4.2.5

Jede komplexe Cauchy-Folge ist konvergent.

Bemk : Der Satz gilt nicht immer für Folgen mit rationalen Werten!

rationale Cauchy-Folge $\not\Rightarrow (a_n)$ konvergiert
 $\Leftarrow$

Beweis :

Schritt 1 : (a_n) Cauchy Folge $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt
(Schritt 1 gilt auch für rationale Folgen)

Cauchy : $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Für $\varepsilon = 1 : \forall n \geq n_0$

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_0}|}_{\substack{\downarrow \\ \text{D.U.}}} + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$$

Wir haben bewiesen, dass $(n_0 = n_0(1))$

$$\underline{|a_n| \leq 1 + |a_{n_0}|} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\underline{R := \max \{ |a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}| \}}$$

$$\left. \begin{array}{l} n < n_0 \Rightarrow |a_n| \leq R \\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq R \end{array} \right\} \Rightarrow |a_n| \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schritt 2 : ▲

Bem : Dieser Schritt gilt nur für reelle/komplexe
Folgen

Schritt 1 $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt

$$\Rightarrow \exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{C}$$

Korollar
von B.W.



Wir haben hier die Ordnungsvollständigkeit
von $\mathbb{R}$ benutzt!

Also:

$$\left. \begin{array}{l} (a_n) \text{ Cauchy Folge} + \\ \exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} l \end{array} \right\} \Rightarrow \underset{*}{a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l}$$

Bwk: Falls (a_n) eine rationale Folge ist
und $\exists (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, a_{n_k} \rightarrow l, \underline{l \in \mathbb{Q}}$
 $\Rightarrow a_n \rightarrow l \in \mathbb{Q}$

$$(*) \ (a_n) \text{ Cauchy} : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall \underline{n, m} \geq \underline{n_0} \left[|a_{\underline{n}} - a_{\underline{m}}| < \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$(*) \ a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} l : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \left[|a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

Bwk: $k \geq k_0 \Leftrightarrow n_k \geq n_{k_0}$

$$\begin{aligned}
 |a_n - l| &= |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| \leq \\
 &\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| \\
 \text{DU } &\underbrace{\qquad\qquad\qquad} < \frac{\varepsilon}{2} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad} < \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{gilt, falls} \quad | \quad \text{gilt,} \\
 \rightarrow \boxed{n \geq n_0} & \quad | \quad \text{falls } k \geq k_0 \\
 n_k \geq n_0 & \quad , \quad \Leftrightarrow n_k \geq n_{k_0}
 \end{aligned}$$

Es sei $k \in \mathbb{N} : n_k \geq n_0$ und $n_k \geq n_{k_0}$
 $n_k \geq \text{Max}\{n_0, n_{k_0}\}$

Für eine solche k , wir haben: $\forall n \geq n_0$

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



4.3 Zurück in die Vergangenheit...

$\mathbb{R} \rightarrow$ Dezimalzahlen

$$a = p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

$$p \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_i \in \{0, \dots, 9\}$$

Ordnung:

a

$$b = q \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$$

$$q \in \mathbb{Z}, \beta_i \in \{0, \dots, 9\}$$

$$a \leq b : \Leftrightarrow$$

- Entweder $p < q$, oder
- $p = q, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$
 $\Rightarrow \alpha_k \leq \beta_k$

Lemma 2.2.1

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nicht-negativen Dezimalzahlen, die

- nach oben beschränkt ist, d.h., es ein $M \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und
- monoton steigend ist, d.h., $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stabilisiert, d.h., es gibt eine Dezimalzahl a , sodass $a_n \Rightarrow a$. Dazu gilt $a_n \leq a \leq M$.

Bmk 1: Im Beweis dieses Lemmas
haben wir die Ordnungsvollständigkeit
nicht benutzt

Bmk 2: $\underbrace{a_n \Rightarrow a}_{\uparrow} \Rightarrow \underbrace{a_n \rightarrow a}_{\swarrow}$

$\top (a_n)$ stabilisiert $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l}
 a_0 = p_0 \cdot \alpha_{01} \alpha_{02} \alpha_{03} \dots \\
 a_1 = p_1 \cdot \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \\
 a_2 = p_2 \cdot \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 k \geq N_0 \quad \alpha_{k1} \alpha_{k2} \alpha_{k3} \dots
 \end{array}$$

Folgen der Spalten

$a_n \Rightarrow a \Leftrightarrow$ jede Spalte definitiv konstant

Satz 4.3.1

Es sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, definiert als die Menge der Dezimalzahlen. Falls A nach oben beschränkt ist, dann besitzt A ein Supremum.

Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$

Beweis : Idee :

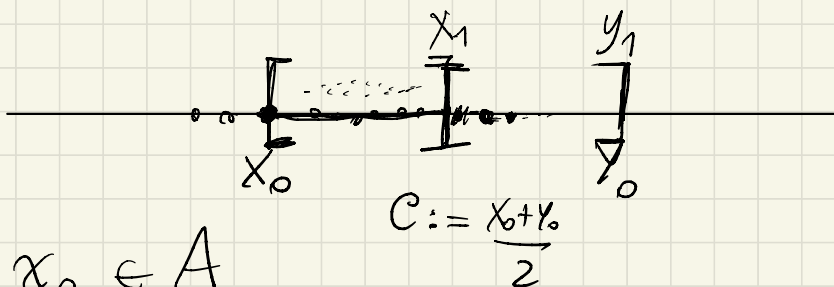
(I) Wir bilden eine spezielle
beschränkte monoton steigende
Folge (x_n)

Lemma 2.2.1 $\Rightarrow x_n \Rightarrow \bar{x}$

(II) Wir benutzen die Konstruktion von (x_n) ,
um zu beweisen, dass $\bar{x} = \sup(A)$

Die Idee benutzt die Intervallschachtelung

$$A : \exists y_0 \in \mathbb{R} : y_0 \geq x \quad \forall x \in A$$



Es sei $x_0 \in A$

$$\text{Aus } [x_0, y_0] \rightarrow [x_0, c], [c, y_0]$$

Wir wählen entweder $\uparrow$ oder $\nearrow$ mit der

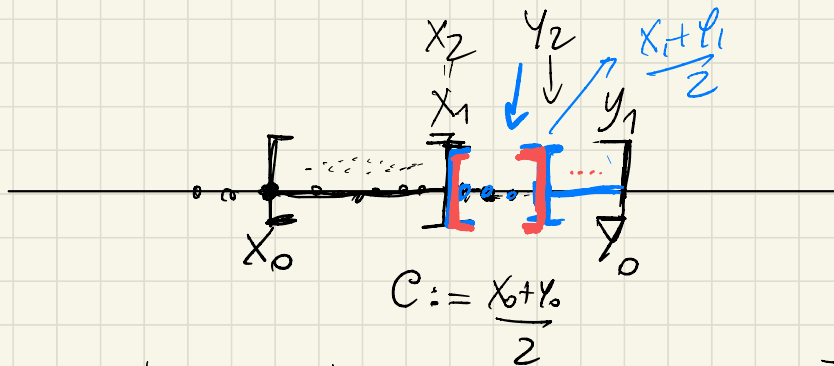
Regel :

* $\left[\text{Wir wählen } [x_0, c] \text{ nur wenn } [c, y_0] \cap A = \emptyset \right]$

Dieses neue Intervall $\rightarrow$

$$[x_1, y_1]$$

$$\Rightarrow y_1 \geq x \quad \forall x \in A$$



Wir wählen entweder $[x_1, \frac{x_1 + y_1}{2}]$ oder $[\frac{x_1 + y_1}{2}, y_1]$

mit der Regel:

Wir wählen $[x_1, \frac{x_1 + y_1}{2}]$ nur falls

$$[\frac{x_1 + y_1}{2}, y_1] \cap A = \emptyset$$

$$\Rightarrow [x_2, y_2] \quad y_2 \geq x \quad \forall x \in A$$

Wir wiederholen dieses Verfahren:

Intervallschachtelung: Folge von Intervallen $[x_i, y_i]$, sodass

Intervallschachtelung:

$$(1) \quad [x_0, y_0] \supseteq [x_1, y_1] \supseteq [x_2, y_2] \supseteq \dots \supseteq [x_n, y_n] \supseteq \dots$$

$\downarrow$
(2) $(x_n)_n$ ist monoton wachsende Folge, nach oben beschränkt

$$\left[\begin{array}{l} \text{Lemma 2.2.1} \Rightarrow \\ \exists \bar{x} : \underline{x_n} \Rightarrow \underline{\bar{x}} \end{array} \right] \quad x_n \leq y_0 \quad \forall n$$

$$(3) \quad \text{Durch Konstruktion: } [x_n, y_n] \cap A \neq \emptyset \text{ und } y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n} \Big]$$

$$(4) \quad \underline{y_n} \geq x \quad \forall x \in A$$

$$(5) \quad x_n < y_k \quad \forall n, k \quad \text{und}$$

$$x_n \leq \bar{x} \leq y_k \quad \forall n, k$$

$\uparrow$ Übung

Insbesondere gilt

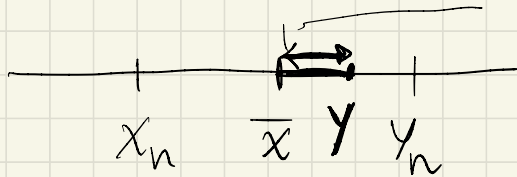
$$(*) \quad \underline{x_n \leq \bar{x} \leq y_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Zu beweisen: $\bar{x} = \sup(A)$

(I) $\bar{x}$ ist eine obere Schranke:

Widerspruchsbeweis: nehmen wir an,

dass $\exists y \in A : \underline{y > \bar{x}}$

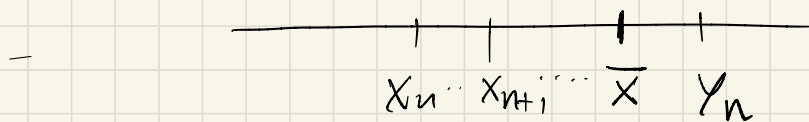


$$\Rightarrow 0 < \underbrace{y - \bar{x}}_{> 0} < \underbrace{y_n - x_n}_{> 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{y_0 - x_n}{2^n} \right)$$

Widerspruch

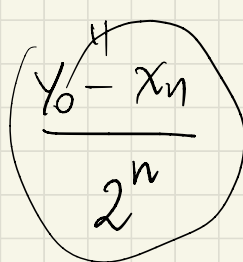
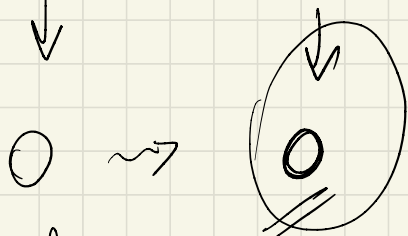
(II) $\bar{x}$ die kleinste obere Schranke:



$\forall \varepsilon > 0$ ist $\bar{x} - \varepsilon$ keine obere Schranke

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x > \bar{x} - \varepsilon$$

$$0 \leq \underbrace{\bar{x} - x_n}_{\downarrow} \leq \underbrace{y_n - x_n}_{\downarrow} \quad (\bar{x} \leq y_n) \quad \forall n$$



Einschürungssatz

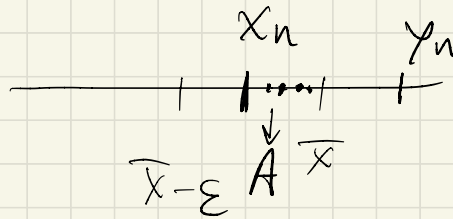
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 :$

$\forall n \geq n_0$

$$|\bar{x} - x_n| = \bar{x} - x_n < \varepsilon$$

$x_n > \bar{x} - \varepsilon$

$$\leadsto \exists n \in \mathbb{N} : x_n > \bar{x} - \varepsilon \quad \parallel$$



$$[x_n, y_n] \cap A \neq \emptyset$$

Nun...

$$\Rightarrow \exists x \in A \quad (x > x_n) \quad \text{so dass} \quad x > \bar{x} - \varepsilon$$



Übung: Lesen Sie 4.3.1

4.3.2.: Andere Möglichkeiten zur Einführung reeller Zahlen

(1) (a_n) monoton wachsende^{nach oben} beschränkte Folge, mit Werten in $\mathbb{Q}$

Wir haben bewiesen

$$\leadsto a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}, \quad l = \sup \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$\hookrightarrow$ Ordnungsvollständigkeit

$\mathbb{R}$ ist die Quotientenmenge der Menge der monoton wachsenden, nach oben beschränkten Folgen, mit der Äquiv. $\sim$:

$$(a_n) \sim (b_n) \quad : \iff$$

$$\forall r \in \mathbb{Q}$$

$$a_n < r \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff b_n < r \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(2) Cauchy Folgen...

(a_n) Folge mit $\mathbb{Q}$ Werten

$\lceil (a_n)$ reelle Folge. Dann (a_n) Cauchy-Folge
 $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert $\rceil$

$$\begin{array}{ccc} a_n \rightarrow l & & b_n \rightarrow l \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

$$a_n - b_n \rightarrow 0$$

der Menge

$\hookrightarrow \mathbb{R}$ ist die Quotientenmenge der rationalen
Cauchy Folgen (a_n) mit
 $\sim$:

$$(a_n) \sim (b_n) : \Leftrightarrow \underbrace{a_n - b_n \rightarrow 0}$$

$\downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in \mathbb{Q})$$

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0$$

$$|a_n - b_n| < \varepsilon$$

(3) Dedekindscher Schnitt

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}}_A \cup \underbrace{\{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}}_B = \mathbb{Q}$$

$\neg \exists x \in \mathbb{Q} : \underbrace{x^2 = 2}_{\sqrt{2}}$

* $A, B \neq \emptyset$

* $A \cap B = \emptyset$

* $A \cup B = \mathbb{Q}$

* $a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$

$r \in \mathbb{Q} \quad \xrightarrow{A} \quad \{x \in \mathbb{Q} : x \leq r\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > r\} \xrightarrow{B}$

$\{x \in \mathbb{Q} : x < r\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \geq r\}$

$\nearrow A' \quad \quad \quad \nearrow B'$