Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
8.11.2015

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 5

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch 15.11.17 11:55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind nicht möglich.

Aufgabe 1. (25 Punkte)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, mit nicht-verschwindender Krümmung, und sei $(\underline{t}(t), \underline{n}(t), \underline{b}(t))$ das begleitende Dreibein von c, mit $t \in I$. Wir wissen, dass $\underline{b}(t) = \underline{t}(t) \times \underline{n}(t)$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass

$$\underline{t}(t) = \underline{n}(t) \times \underline{b}(t), \qquad \text{und} \qquad \underline{n}(t) = \underline{b}(t) \times \underline{t}(t).$$

b) Sei $\phi : I \to I$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und sei $a = c \circ \phi$ eine Umparametrisierung der Kurve. Das begleitende Dreibein $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$ von a im Punkt s ist definiert als das begleitende Dreibein $(\underline{t}_c(t), \underline{n}_c(t), \underline{b}_c(t))$ von c im Punkt $t = \phi(s)$. Zeigen Sie, dass

$$\underline{t}(s) = \frac{\dot{a}(s)}{\|\dot{a}(s)\|}, \qquad \underline{n}(s) = \frac{\dot{\underline{t}}(s)}{\|\dot{\underline{t}}(s)\|},$$

$$\underline{b}(s) = \frac{\dot{a}(s) \times \ddot{a}(s)}{\|\dot{a}(s) \times \ddot{a}(s)\|}.$$

c) Zeigen Sie, dass die Frenet-Gleichungen als

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{t}}(s) \\ \dot{\underline{n}}(s) \\ \dot{\underline{b}}(s) \end{pmatrix} = \|\dot{a}(s)\| \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t}(s) \\ \underline{n}(s) \\ \underline{b}(s) \end{pmatrix},$$

geschrieben werden können, wobei $\kappa(s) := \kappa_c(t)$ und $\tau(s) := \tau_c(t)$, mit κ_c und τ_c die Krümmung und Torsion von c bezeichnen.

d) Zeigen Sie, dass

$$k(s) = \frac{\|\dot{a}(s) \times \ddot{a}(s)\|}{\|\dot{a}(s)\|^3}.$$

<u>Aufgabe</u> 2. (15 Punkte)

Die *Schraubenlinie* ist parametrisiert durch

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} a\cos(s) \\ a\sin(s) \\ b\, s \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R} \qquad a > 0, \qquad b \neq 0.$$

a) Kann man die Formeln aus Aufgabe 1 benutzen?

b) Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$.

c) Berechnen Sie die Krümmung und die Torsion der Kurve α.

<u>Aufgabe</u> 3. (10 Punkte)

Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Kurve parametrisiert durch

$$\beta(s) = \begin{pmatrix} s \\ \frac{1}{2}s^2 \\ \frac{1}{3}s^3 \end{pmatrix}.$$

a) Kann man die Formeln aus Aufgabe 1 benutzen?

b) Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$ der Kurve β.

c) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve β.