Ana I Thorbergsson

1. Sei $b \in (0,1)$ beliebig. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{b+a_n}{1+a_n}$. Man zeige, dass die Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

2. (a) Es sei
$$a_n = \frac{\frac{1}{n} + (-1)^n}{\frac{1}{n} + i^n}.$$
Man bestimme die Häufungspunkte der Folge (a_n).

   (b) Man bestimme
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}.$$

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *periodische* Funktion, d.h. es existiert eine Zahl $T > 0$, so dass $f(t+T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Angenommen es existiert $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

4. (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}?$$

   (b) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n,$$
wobei $x \in \mathbb{C}$.

5. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$
In welchen $x \in \mathbb{R}$ ist f stetig?

6. Es seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sind f und h differenzierbar in 0 und $f(0) = h(0)$, $f'(0) = h'(0)$, so ist g auch differenzierbar in 0 mit $g'(0) = f'(0)$.

7. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = xe^{|x|}$ differenzierbar? Man bestimme die Ableitung von f wo sie existiert.

8. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und sei g nullstellenfrei. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt, dass $f(x) \leq cg(x)$.

9. Man bestimme von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch
$$f(x) = \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}},$$
die Grenzwerte $\lim_{x\to 0+} f(x)$, $\lim_{x\to 0-} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, falls sie existieren.

10. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funkion. Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$|f(x)| \leq a + bx.$$

11. Man bestimme für $a > 0$ den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$