Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
25.10.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 3

Diese Übungen müssen bis spätestens Donnerstag 2.11.17 12:00 Uhr, in dem Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackeren Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (15 Punkten)

Seien $a, b > 0$. Betrachten Sie die Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Berechnen Sie den Kreis, der die Ellipse im Punkt $(x, y) \in E$ am besten approximiert.

Aufgabe 2. (15 Punkten)

Seien $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zwei ebene, periodische, nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit Periode L.

a) Wenn α aus β durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation entsteht, gilt
$$n_\alpha = n_\beta.$$

b) Wenn α aus β durch eine orientierungsumkeherende Parametertransformation entsteht, gilt
$$n_\alpha = -n_\beta.$$

c) Zeigen Sie, dass
$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi}\big(\theta_\alpha(s+L) - \theta_\alpha(s)\big)$$
für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt, wobei θ_α eine Funktion mit $\dot{\alpha}(t) = e^{i\theta_\alpha(t)}$ ist.

Aufgabe 3. (5 Punkten)

a) Ist die Krümmung einer regulären periodischen Kurve periodisch?

b) Ist die Periode der Krümmung gleich der Periode der Kurve?

Aufgabe 4. (10 Punkten)

Welche der folgenden Integralformeln berechnet die Umlaufzahl einer L-periodischen, nicht unbedingt nach Bogenlänge parametrisierten, regulären Kurve u?

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^L \frac{\kappa(s)}{\|\dot{u}(s)\|}ds, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^L \frac{\kappa(s)}{\|\dot{u}(s)\|^2}ds, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\|\dot{u}(s)\|ds, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\|\dot{u}(s)\|^2 ds.$$

Aufgabe 5. (5 Punkten)

Für $t_0 \in \mathbb{R}$ sei $p\colon (t_0, t_0 + 2\pi) \to S^1 \setminus \{e^{it_0}\}$ gegeben durch $p(t) = e^{it}$. Zeigen Sie, dass p bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrabbildung.
Hinweis: Benutzen Sie den Arkustangens.