Mathematisches Institut
*Prof. Dr. Sabatini*
*Assistent: Dr. Rot*

Universität zu Köln
09.12.2015

---

**Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 8**

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 16.12.15 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

**Aufgabe 1. (15 Punkte)**

Seien

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1, \qquad z \neq \pm 1\},$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1, \qquad -1 < z < 1\}$$

zwei reguläre Flächen. Skizzieren Sie diese Flächen. Zeigen Sie, dass $S_1$ und $S_2$ diffeomorph sind.

**Aufgabe 2. (15 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = xyz.$$

a) Zeigen Sie, dass $S = f^{-1}(1)$ eine reguläre Fläche ist.
b) Parametrisieren Sie diese Fläche.
c) Geben Sie eine glatte Funktion $g : S \to \mathbb{R}$ an, sodass $d_p g = 0$ für jeden Punkt $p \in S$ und mit Bild $g(S) = \{1,2,3,4\}$.

**Aufgabe 3. (20 Punkte)**

Sei $S$ das Bild von $\varphi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} t\cos(s) \\ s\cos(t) \\ ts \end{pmatrix}.$$

Man kann beweisen, dass die Menge $S$ ist eine reguläre Flache ist.

a) Zeigen Sie, dass $D_{(s,t)}\varphi$ für jeden Punkt $(s,t) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ Rang 2 hat.
b) Zeigen Sie, dass $\varphi$ injektiv ist.
c) Zeigen Sie, dass die Koordinatenlinien von $\varphi$ ebene Kurven sind. Welche Koordinatenlinien sind Geraden?