Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
04.11.2015

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 3

Diese Übungen müssen bis spätestens Mittwoch 11.11.14 18 Uhr, in den Briefkästen im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihre Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackeren Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkten)

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve gegeben durch

$$c(t) = (t, t^2).$$

Berechnen Sie die Kreise, die die Kurve zur dritten Ordnung approximieren in den Punkten $(0, 0), (-1, 1)$ und $(1, 1)$.

Aufgabe 2. (15 Punkten)

Seien $a, b > 0$. Sehen Sie sich die Ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\},$$

an. Berechnen Sie den Kreis, der die Ellipse am besten approximiert im Punkt $(x, y) \in E$.

Aufgabe 3. (8 Punkten)

Seien $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zwei ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurven, periodisch mit Periode L.

a) Zeigen Sie, wann α aus β durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation entsteht, dass gilt
$$n_\alpha = n_\beta.$$

b) Zeigen Sie, wann α aus β durch eine orientierungsumkeherende Parametertransformation entsteht, dass gilt
$$n_\alpha = -n_\beta.$$

c) Zeigen Sie, dass
$$n_\alpha = \frac{1}{2\pi}(\theta_\alpha(s + L) - \theta_\alpha(s))$$
für alle $s \in \mathbb{R}$. Hier ist θ_α eine Function sodass $\dot{\alpha}(t) = e^{i\theta_\alpha(t)}$.

Aufgabe 4. (7 Punkten)

a) Ist die Periode einer Kurve[1] wohldefiniert ?

b) Ist die Krümmung einer regulären periodischen Kurve periodisch ?

c) Ist die Periode der Krümmung gleich der Periode der Kurve ? Erklären Sie Ihre Antwort mit einem Beispiel.

Aufgabe 5. (10 Punkten)

Welche der folgenden Integralformeln berechnet die Umlaufzahl einer L-periodischen, nicht unbedingt nach Bogenlänge parametrisierten, regulären Kurve c ?

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^L \frac{\kappa(s)}{\|\dot{c}(s)\|}ds, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^L \frac{\kappa(s)}{\|\dot{c}(s)\|^2}ds, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\|\dot{c}(s)\|ds, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\|\dot{c}(s)\|^2 ds.$$

Zeigen Sie, dass diese Formel korrekt ist.

1. Erinneren Sie, dass eine Kurve eine Äquivalenzklasse der regulären parametrisierten Kurven ist.