

Vorlesung 26



Von letztem Mal...

Satz 9.2.2

Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Satz 9.2.3

Jede monotone, beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

(Ohne Beweis)

Lemma 9.2.4

Es sei $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und es sei $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitzstetige Funktion, so dass $h([a, b]) \subseteq I$. (I kompaktes Intervall)
Dann ist die Funktion $\phi \circ h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls integrierbar.

Erinnerung:

(1) ϕ ist Lipschitzstetig in $I : \Leftrightarrow \exists L > 0 :$
$$|\phi(y) - \phi(x)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in I$$

(2) Riemannsches Integrierbarkeitskriterium (Kor. 9.1.3)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion

f integr. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z$: Zerlegung von $[a, b]$

$$\Theta(Z, f) - \mathcal{U}(Z, f) < \varepsilon$$

(3) $\Theta(Z, f) - \mathcal{U}(Z, f) =$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \sup \{ |f(x) - f(x')|, x, x' \in [z_i, z_{i+1}] \}$$

wobei $Z = \{ a = z_0, z_1, \dots, z_n = b \}$

Beweis (des Lemmas)

Bmk : $f = \phi \circ h$ beschränkt ist
(weil ϕ beschränkt ist

- ϕ Lipschitzstetig $\Rightarrow$ stetig
- I kompakt $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta(z, \phi \circ h) - \mathcal{U}(z, \phi \circ h) =$$

$$\stackrel{(3)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot \sup \{ |(\phi \circ h)(x) - (\phi \circ h)(x')|, \forall x, x' \in [z_i, z_{i+1}] \}$$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \phi \text{ Lipschitzstetig} \Rightarrow |(\phi \circ h)(x) - (\phi \circ h)(x')| \leq \\ \leq L \cdot |h(x) - h(x')| \\ \bullet \sup \{ L \cdot y, y \in A \} = L \cdot \sup \{ y, y \in A \} \end{array} \right] \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot L \cdot \sup \{ |h(x) - h(x')|, x, x' \in [z_i, z_{i+1}] \}$$

$$\stackrel{(3)}{=} L \cdot (\theta(z, h) - \mathcal{U}(z, h))$$

$$\vartheta(z, \phi \circ h) - \mathcal{U}(z, \phi \circ h) \leq L (\vartheta(z, h) - \mathcal{U}(z, h))$$

h integrierbar $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z :$

Kor.
9.1.3.

$$\vartheta(z, h) - \mathcal{U}(z, h) < \frac{\varepsilon}{L}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z :$

$$\vartheta(z, \phi \circ h) - \mathcal{U}(z, \phi \circ h) < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \phi \circ h$ ist integrierbar

Kor.
9.1.3.



Bwk : $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) = |x|$$

ist Lipschitzstetig
($L = 1$)

$$\left(\begin{array}{l} \text{Dreiecksungleichung:} \\ ||x| - |y|| \leq |x - y| \\ |\phi(x) - \phi(y)| \end{array} \right)$$

Korollar 9.2.5

Wenn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion ist, dann ist auch $|f|$ integrierbar.

Beweis (Übung)

Erinnerung : $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$|f'(x)| \leq K \quad \forall x \in D$$

$\Rightarrow$ f Lipschitzstetig

Bmk : $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, D beschränkt
 $x \mapsto x^2$
ist Lipschitzstetig

Satz 9.2.6

Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen. Dann ist die Produktfunktion $f \cdot g$ ebenfalls integrierbar.

Beweis

1. Schritt : $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow$
 $h^2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar

h int. $\Rightarrow h$ beschränkt $\Rightarrow \exists C > 0 : |h(x)| \leq C$

und $\phi: [-C, C] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(y) = y^2$

Lipschitzstetig (Bmk)

$\Rightarrow$ (Lemma 9.2.4) $\phi \circ h = h^2$ integrierbar

2. Schritt Zu zeigen: $f \cdot g$ integrierbar

f, g integr. $\Rightarrow f+g$ integr. (Satz 9.1.4)

$\Rightarrow (f+g)^2$ integr.
(1. Schritt)

$$f \cdot g = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(f+g)^2}_{\text{integrierbar}} - \underbrace{f^2}_{\text{integrierbar}} - \underbrace{g^2}_{\text{integrierbar}} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{integrierbar (Satz 9.1.4)}}$



Lemma 9.2.7

Wenn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Beweis

f integr. $\Rightarrow |f|$ integr. (Kor. 9.2.5)

Dann

$$\underbrace{-|f(x)|} \leq \underbrace{f(x)} \leq \underbrace{|f(x)|}$$

$\Downarrow$ Lemma 9.1.7

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

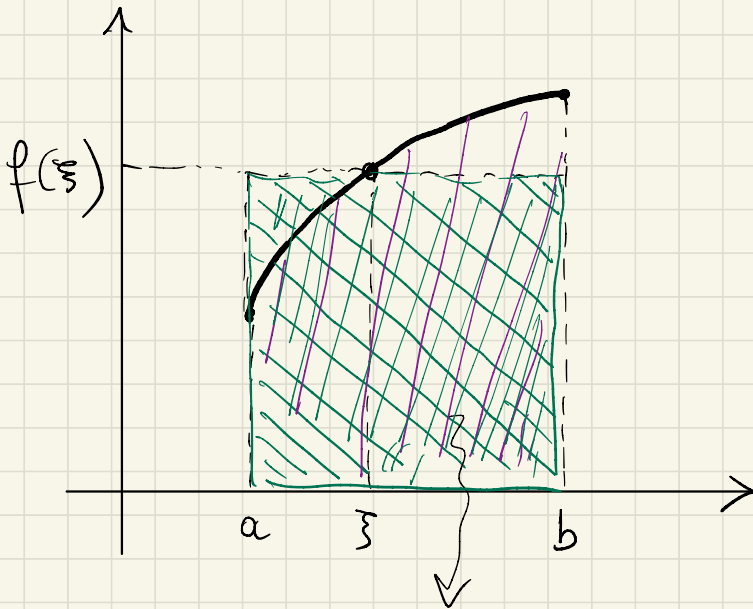
$$\Downarrow$$
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

□

Satz 9.2.8**(Mittelwertsatz der Integralrechnung)**

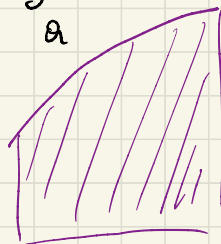
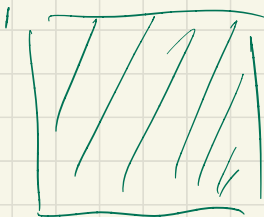
Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (*)$$



$$f(\xi) \cdot (b-a)$$

$$(*) \quad f(\xi) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$



Beweis

f stetig, $[a, b]$ kompakt

$\Rightarrow$

Korollar 5.5.4.

$$f([a, b]) = [m, M]$$

Min.

Max

$$m \leq f(x) \leq M \quad (*)$$

$$m \text{ konstant} \Rightarrow \int_a^b m \cdot dx = m \cdot (b-a)$$

$$M \quad " \quad \Rightarrow \int_a^b M dx = M \cdot (b-a)$$

Aus (*) und Lemma 9.1.7

$$m \cdot (b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \left(\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \right) \leq M$$

$\Rightarrow$ (weil $f([a,b])$ zusammenhängend ist
 $\Leftrightarrow$ Intervall ist)

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] :$

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$



9.3 Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

I : offenes Intervall

Definition 9.3.1 (wenn sie existiert)

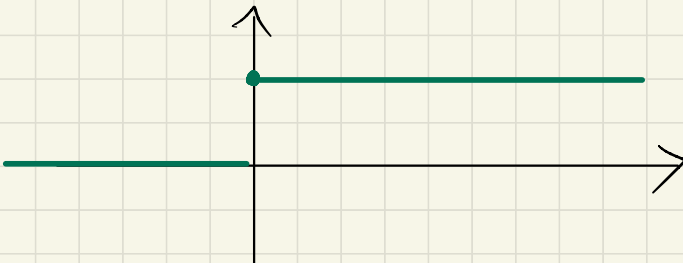
Eine **Stammfunktion** von f ist eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $F'(x) = f(x)$ für alle Punkte x von I .

Behauptung: Nicht jede Funktion besitzt eine Stammfunktion... (später)

Beispiel: "Heaviside Funktion"

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

besitzt keine Stammfunktion



(*)

I offenes Intervall

Satz 9.3.1**(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei $x_0 \in I$. Dann ist

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

eine Stammfunktion von f .Bwk: f stetig $\Rightarrow f$ integrierbar, Satz 9.2.2Zu beweisen: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x), \forall x \in I$

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \left[\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right] = \\ &\stackrel{\text{Kor. 9.1.9}}{=} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_{x=a}^{x+h=b} f(t) dt \right] \stackrel{\text{Satz 9.2.8.}}{=} f(\xi_h) \\ &\quad \left(\xi_h \in [x, x+h] \right) \end{aligned}$$

Bwk: $h \rightarrow 0 \Rightarrow \xi_h \rightarrow x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) \stackrel{\text{Stetig von } f \text{ + Bwk}}{=} f(x)$$

Bwk

f stetig in I ,

$$F(x) := \int^x f(t) dt$$

(x_0) $\rightarrow$ wir haben x_0
gewählt...

$\Rightarrow$ F hängt von x_0 an!

Falls

$$G(x) := \int_{y_0}^x f(t) dt$$

was ist $G - F$?

$$(G - F)(x) = \int_{y_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt =$$

$$= \int_{y_0}^x f(t) dt + \int_x^{x_0} f(t) dt = \int_{y_0}^{x_0} f(t) dt$$

Konstant

Lemma 9.3.2

Wenn F und G Stammfunktionen von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sind, dann ist die Funktion $F - G$ eine konstante Funktion.

Beweis:

• F, G Stammfunktionen $\Rightarrow F, G$ differenzierbar
 $\Rightarrow F - G$ "

• F, G Stammfunkt. von f

$$\Rightarrow (F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

$$\Rightarrow F - G = \text{konstant}$$

Kor. 8.2.7, 5.



Frage : Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I offenes Int.) eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt.

Also ist f die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$

• Welche Eigenschaften muss f erfüllen?

(1) Ist f immer stetig?

Nein

Übung :
$$F(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass F differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist, aber $F'(x)$ nicht stetig in $x_0 = 0$ ist

($\hookrightarrow$ Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist nicht unbedingt stetig, aber...

Satz 9.3.3

(Mittelwertsatz der Ableitungen) Es sei $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_1, x_2 \in (a, b)$. Dann nimmt F' alle Werte zwischen $F'(x_1)$ und $F'(x_2)$ an.

Beweis

Nehmen wir an, $F'(x_1) < F'(x_2)$ und λ :

$$\underbrace{F'(x_1) < \lambda < F'(x_2)}$$

Zu beweisen: $\exists c \in (x_1, x_2) : F'(c) = \lambda$

Es sei $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = F(x) - \lambda \cdot x$$

g differenz. $g'(x) = F'(x) - \lambda$

$$g'(x_1) = F'(x_1) - \lambda < 0 \quad \text{und} \quad g'(x_2) = F'(x_2) - \lambda > 0$$

we das Vorzeichen von g' nicht konstant ist

$\Rightarrow$ g nicht monoton ist (Kor. 8.2.7)
in (x_1, x_2)

(Prop. 7.1.1) g injektiv $\Leftrightarrow$ g ^{streng} monoton
($\Leftarrow$ umkehr)

$\Downarrow$
($\Rightarrow$)

Da g nicht monoton in $[x_1, x_2]$ ist
 $\Rightarrow g$ nicht injektiv in $[x_1, x_2]$

$$\Rightarrow \exists y_1 \neq y_2 \in [x_1, x_2]$$

$$g(y_1) = g(y_2)$$

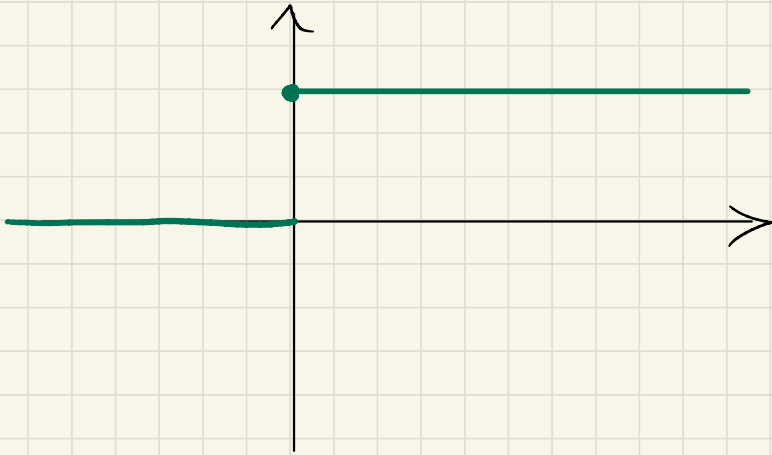
$$\left. \begin{array}{l} * g \text{ stetig in } [y_1, y_2] \\ * g \text{ diff. in } (y_1, y_2) \\ * g(y_1) = g(y_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Satz von Rolle}$$

$$\exists c \in (y_1, y_2) : g'(c) = 0$$

$$g'(c) = F'(c) - \lambda = 0 \Leftrightarrow \underbrace{F'(c) = \lambda}$$



Beispiele : die Heaviside-Funktion $H(x)$



besitzt keine Stammfunktion

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x)}_0 \neq \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x)}_1$$

$\Rightarrow$ H nimmt nicht alle Werte zwischen 0 und 1 an $\Rightarrow$ Sie kann keine Stammfunktion haben

Satz 9.3.4

Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion. Dann gilt für alle $a, b \in I$, dass

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis

Wir wissen schon (Satz 9.3.1)

dass

$G(x) := \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f

• F eine beliebige Stammfunktion von f

(Lemma) $\Rightarrow \underbrace{F(x) = G(x) + c}_{\star}, c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) = G(b) - \underbrace{G(a)}_{\substack{= \\ 0}} =$$

$$\stackrel{\star}{=} F(b) - F(a)$$

