

Tutorium 6



Übung 1: Es sei $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subseteq \underline{\mathbb{R}^2}$

Finden Sie: $\underline{\overset{\circ}{A}}$, $\underline{\partial A}$, $\underline{\bar{A}}$, $\underline{HP(A)}$



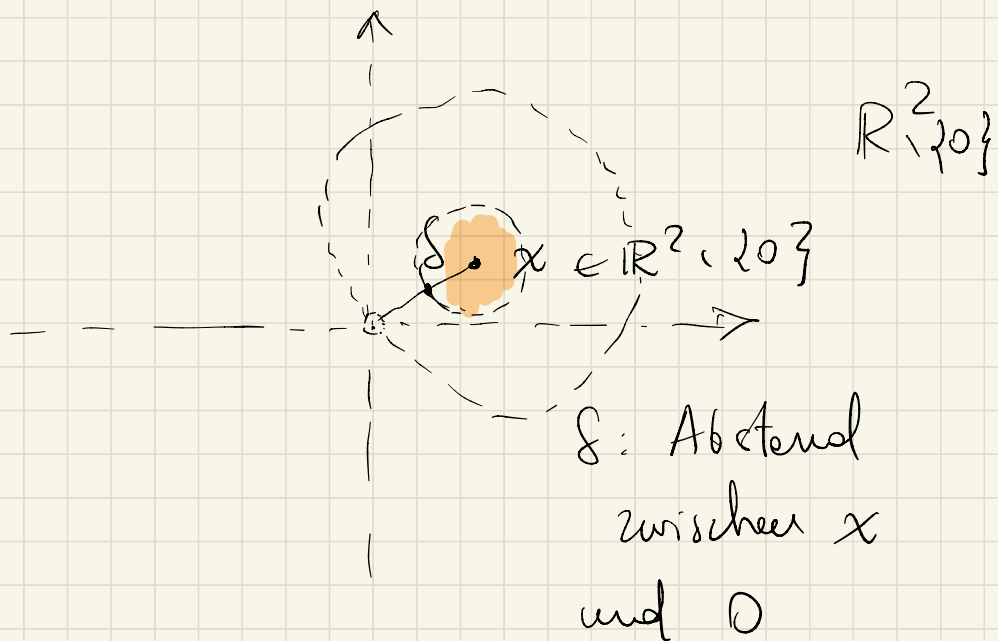
$$\bar{A} = A \cup \partial A \stackrel{!}{=} A \cup HP(A)$$

- x ist ein innerer Punkt: $\Leftrightarrow$
 $\exists U(x) : U(x) \subseteq A$



- $\overset{\circ}{A}$: Innere von A : Menge der inneren Punkte
 $\overset{\circ}{A} = A$ (d.h. A offen)

A:



$$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \Leftrightarrow \delta > 0$$

$$R := \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow \forall xy \in \mathcal{U}_R(x), y \in A$$

$$\text{Zu beweisen: } y \in A \Leftrightarrow |y| > 0$$

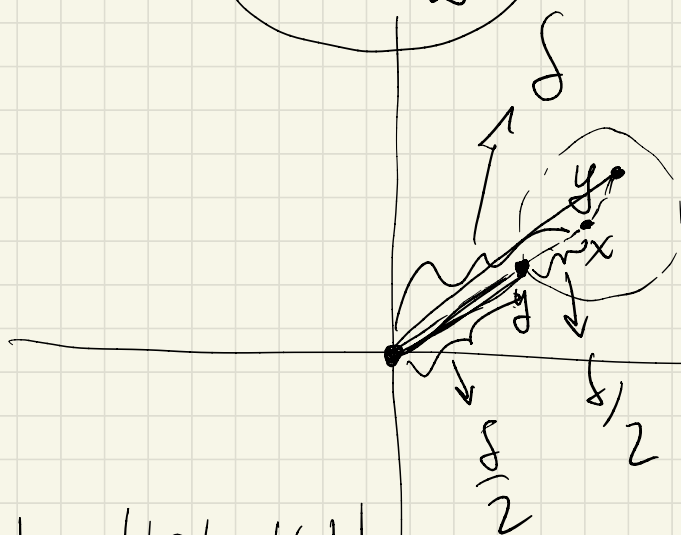
(Übung)

$$\partial A = ?$$

Zu beweisen: $y \in \mathcal{U}_R(x)$ gehören A

$$y \in A \Leftrightarrow |y| > 0$$

Zu beweisen: $|y| > \frac{\delta}{2}$



$$|y-x| < \frac{\delta}{2}$$

$$|a+b| \geq ||a| - |b||$$



$$|y| = |y-x+x| \geq ||x| - |y-x|| > \underbrace{|x|}_{\delta} - \underbrace{|y-x|}_{\frac{\delta}{2}} = \frac{\delta}{2}$$

$$\partial A = ?$$

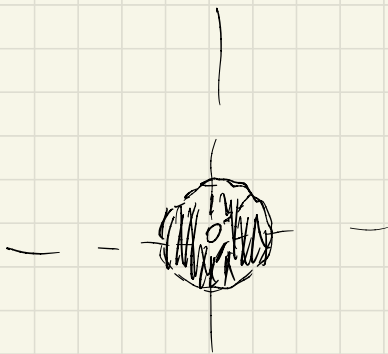
$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Zu beweisen:

$$\forall U(0)$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(0))$$

muss $U(0)$ Punkte
von A und
Punkte von $\mathbb{R}^2 \setminus A$
enthalten



$\forall \varphi \in U_\varepsilon(0)$, ist y , mit $|y| > 0$,
in A und $0 \notin A$

$\Rightarrow$ 0 Randpunkt

Wir haben bewiesen, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$\hat{A}$

$$\hat{A} \cap \partial A = \emptyset, \text{ Da } \hat{A} \cup \partial A = \mathbb{R}^2$$

(in diesem Fall)

$$\Rightarrow \partial A = \{0\}$$

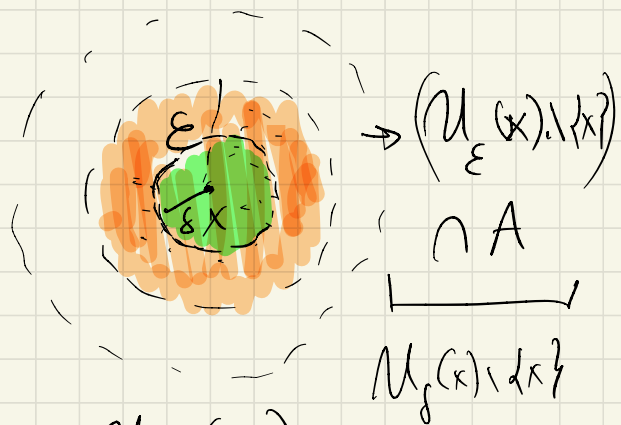
Äußerer Punkte: $\emptyset$

Was ist $HP(A) = ?$

$$HP(\mathbb{R}^2, \{0\}) = \mathbb{R}^2 \quad \text{Warum?}$$

$$(*) \quad \underline{\dot{A} \subseteq HP(A)} \quad (\text{immer so})$$

$$\underbrace{x \in \dot{A}} : \underbrace{\exists \varepsilon > 0} : \underbrace{U_\varepsilon(x) \subseteq A}$$



$$\delta \geq \varepsilon$$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(x) \subseteq U_\delta(x)$$

$$\text{Zu beweisen: } \underbrace{\forall \delta > 0}, \underbrace{(U_\delta(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset}$$

$$(*) \quad \text{Ist } \partial A \subseteq HP(A)?$$

Nein! falls x isoliert ist, $x \in A$

$$x \in \partial A$$



$$x \in A$$

$$x \notin \text{HP}(A)$$

(*) Aber ... $\partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \text{HP}(A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$

In dieser Übung:

Zu beweisen, dass

$$0 \in \partial A, \quad 0 \notin A$$

$$0 \in \text{HP}(\mathbb{R}^2, \{0\})$$

$$\Rightarrow 0 \in \text{HP}(A)$$



$$\forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\varepsilon(0) \setminus \{0\} \subset A \\ 0 \notin A \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \in \text{HP}(\mathbb{R}^2, \{0\})$$

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \mathbb{R}^2 = A \cup \text{HP}(A)$$

Übung 2: Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ist es wahr, dass

(a) $\overset{\circ}{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$?

Und

(b) $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$?

$\overline{B} = B \cup \partial B$

(a) $\overset{\circ}{(\overset{\circ}{A})} = \overset{\circ}{(\overline{\overset{\circ}{A}})}$?

Übung 1: $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\overset{\circ}{A} = A$

$\overset{\circ}{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A} \cup \underbrace{\partial \overset{\circ}{A}}$

$\overline{\overset{\circ}{A}} = \mathbb{R}^2$ $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} = \overset{\circ}{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$ ↓
 $\{0\}$

$\overset{\circ}{A} \neq \overline{\overset{\circ}{A}}$

Bmk : 0 ist ein Randpunkt für $\overset{\circ}{A}$
aber ist kein Randpunkt in $\underbrace{\overline{A}}_{\text{"} \mathbb{R}^2}$

0 ist ein innerer Punkt von $\mathbb{R}^2$

(b) $\underbrace{\overline{A}} = \underbrace{\overline{\overset{\circ}{A}}} ?$

$\mathbb{R}^n$ ist offen und abgeschlossen:
weil $\mathbb{R}^n = (\overset{\circ}{\mathbb{R}^n})$ und abgeschlossen
 $\downarrow \Leftrightarrow$
 $A \text{ abg.} : \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \text{ offen}$
 $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset \text{ offen}$

16) Zum Beispiel, beginnen wir mit einer abg. Menge

$$(A = \bar{A}) \quad \downarrow$$

Ist $(A = \bar{\bar{A}}) ?$

(Wir hatten $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ um zu beweisen, dass)

$\bar{A} \neq \bar{\bar{A}}$

$$B := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \{0\}$$

B ist abgeschlossen (weil $\partial B \subseteq B$, oder $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist offen)

$$\bar{B} = \emptyset$$



$$B = \partial B = \{0\}$$

$$\overline{\emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow$

$$\overline{\bar{B}} = \emptyset \neq B = \bar{B}$$

$$\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n, \text{ weil}$$

$$\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \partial \mathbb{R}^n, \text{ aber } \partial \mathbb{R}^n = \emptyset$$

||

$$\mathbb{R}^n$$

Übung 3 : Finden Sie eine abzählbare
Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$, sodass

$$\bar{A} = \mathbb{R}^n$$

① Zuerst beweisen Sie, dass eine solche
Teilmenge die folgenden Eigenschaften
haben muss:

- (a) $\bar{A} \neq \emptyset$ ~~III~~
- (b) $A \subsetneq \partial A$ (Übung)

II

Warum (a)?

Nehmen wir an, dass $\bar{A} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists x \in A : x$ innerer Punkt von A

ist : $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq A$

$n=1$: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$

I = (a, b) abzählbar?

Man kann beweisen, dass:

$\exists$ Bijektion zwischen (a, b) und $\mathbb{R}$

$$\mapsto \underbrace{|(a, b)|}_{\text{Länge}} = \underbrace{|(a', b')|}_{\text{Länge}} \quad \forall \begin{matrix} a', b' \in \mathbb{R} \\ a' < b' \end{matrix}$$

$$\left[f(x) = \underline{\alpha}x + \underline{\beta} \right]$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \\ a < b$$

$\hookrightarrow \underline{\tan}$ (Tangente von x)

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = \mathbb{Q}^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{matrix} x_i \in \mathbb{Q} \\ \forall i=1, \dots, n \end{matrix} \right\}$$

1) Warum ist A abzählbar?

$$\mathbb{Q}^n = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}}_{n\text{-Mal}}, \quad \mathbb{Q} \text{ abzählbar}$$

(Satz: $A_1 \times \dots \times A_k$ ist abzählbar,
falls A_i abzählbar
ist, $\forall i = 1, \dots, k$)

$\Rightarrow \mathbb{Q}^n$ abzählbar ist

(*) zu zeigen: $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

$$\underline{n=1} \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset \\ \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \end{cases}$$

Beh.: $\forall \varepsilon > 0$ enthält $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ (*)
immer Punkte von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\left[\Rightarrow \text{Kein Punkt von } \mathbb{Q} \text{ ist ein} \right.$
inner Punkt

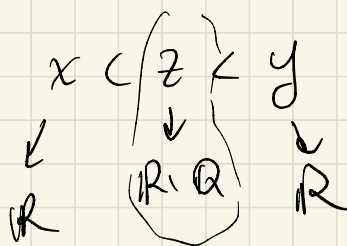
Warum (*)?

$\forall \varepsilon > 0$ enthält $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ (*)
immer Punkte von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

↳ Dichte von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$

Warum ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$?

(Zu beweisen: gegeben beliebige $x, y \in \mathbb{R}$
* können wir $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ finden



[Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: $\forall x < y, x, y \in \mathbb{R}$
 $\exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$]

$$x < y$$

$$\sqrt{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: $\exists q \in \mathbb{Q}$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$x < \underbrace{q \cdot \sqrt{2}} < y$$

$$\left. \begin{array}{l} q \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\} \stackrel{?}{\Rightarrow} q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} ?$$

Frage: gegeben $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
ist immer $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

* Falls $a = 0$, $a \cdot b = 0 \in \mathbb{Q}$

* $a \neq 0$? ($a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$)

ist $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Zu beweisen: $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $\underline{\underline{b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}}$

$$\Rightarrow a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Widerspruch beweist:

Nehmen wir an, dass $\underbrace{a \cdot b}_m \in \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{a} \underbrace{a}_{\in \mathbb{Q} \setminus \{0\}} \cdot \underbrace{b}_{\in \mathbb{Q} \setminus \{0\}} = \underbrace{q}_{\in \mathbb{Q} \setminus \{0\}} \iff \underbrace{b}_{\in \mathbb{Q} \setminus \{0\}} = \underbrace{a^{-1}}_{\in \mathbb{Q} \setminus \{0\}} \cdot \underbrace{q}_{\in \mathbb{Q} \setminus \{0\}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a \cdot x = b & \Leftrightarrow & a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot b \\
 \uparrow & & \underbrace{a^{-1} \cdot a}_1 \\
 G & & \\
 & & x = a^{-1} \cdot b \\
 & & \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\
 & & \uparrow \quad \uparrow \\
 & & G \quad G
 \end{array}$$

Übung 4 : Ist die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \quad * \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad * \end{cases}$$

stetig? Wenn ja, im welchen Punkt x_0 ?

* f ist stetig in $0 =: x_0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x : \underbrace{|x - x_0| < \delta}_{\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

$$x_0 = 0 \quad f(0) = 0$$

$$x \text{ in } (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

• Falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $\uparrow$, dann ist $f(x) = 0$

$$\underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{= 0} < \varepsilon$$

• Falls $x \in \mathbb{Q}$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$|f(x)| = |x|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon ?$$

$$|f(x)| = |x| \Rightarrow \delta = \varepsilon \text{ ist } |f(x)| < \varepsilon \quad \forall |x| < \delta$$

d.h.: f ist stetig in $\underbrace{x_0 = 0}$

Bwk: $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$$\leadsto 0 \leq f(x) \leq x$$

↓
stetige
Funktion

↓
 $g(x) = x$ stetig

$$h(x) = 0$$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

↑
stetig

↑
stetig

Falls $\exists x_0 \in \mathbb{R} : h, g \text{ stetig in } x_0 \text{ und } h(x_0) = g(x_0)$

$\Rightarrow f$ stetig in x_0 ist, mit

$$\underbrace{h(x_0) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{(Einschränkungssatz)}} = \underbrace{g(x_0)}}_{\text{(Einschränkungssatz)}}$$

Bmk : $h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = x$$

$$\Rightarrow \underbrace{h(0)} = \underbrace{g(0)} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ stetig in } x=0 \\ \underbrace{f(0)=0} \end{array} \right]$$

Zu beweisen : f ist nicht stetig in
 $x_0, \quad \underline{\forall x_0 \neq 0}$

$$x_0 \neq 0$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\bullet x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow f(x_0) = x_0$$

$$\forall \delta > 0$$

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

stetig
ist

enthält immer Punkte

von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

$$\text{mit } f(x) = 0 \Rightarrow$$

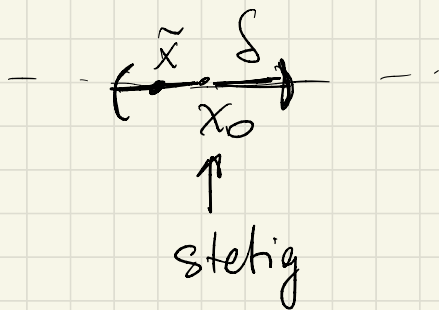
$$|f(x) - f(x_0)| = |x_0| > 0$$

$\leadsto f$ ist nicht stetig in x_0 , falls $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Übung: Zeigen, dass f nicht stetig in x_0 ist
 $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Übung 5: (a) Ist die folgende Behauptung
wahr oder falsch? Falsch

" Falls f stetig in x_0 ist, dann $\exists U_f(x_0)$,
so dass $\forall \tilde{x} \in U_f(x_0)$, f stetig in $\tilde{x}$ ist "



Nein

Übung 5 (b): Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis:

Es sei f stetig in x_0 . Dann $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, sodass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Es sei $U := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$. Dann ist f stetig in U . ($\leftarrow$ das ist eine falsche Behauptung!)

Und der tut, für einen beliebigen $\tilde{x} \in U$, gilt

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(\tilde{x})| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(\tilde{x})| < 2\varepsilon$$

$$x \in U$$

$$\tilde{x} \in U \Rightarrow$$

...