Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
9.10.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 0

Diese Woche werden die Übungen nicht korrigiert.

Aufgabe 1.

Es sei $\alpha\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

a) Ist α eine reguläre Kurve ?

b) Es sei $\beta(s) = (\sin(s^3), \cos(s^3))$, für alle $s \in \mathbb{R}$. Finden Sie ein Intervall J, sodass $\beta|_J$ eine Umparametrisierung von α ist. Ist die Parametertransformation orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ?

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass $SO(2)$ die Menge der Matrizen ist, die geschrieben werden können als

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass $SO(n)$ eine Untergruppe von $O(n)$ ist.

b) Ist $O(n) \setminus SO(n)$ eine Untergruppe von $O(n)$?

Aufgabe 4.

Seien $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierten Kurven

$$\alpha(t) = (t, t^3), \quad \beta(t) = (t^2 - 1, t^3 - t), \quad \text{und} \quad \gamma(t) = (t^2, t^3).$$

a) Prüfen Sie, welche der parameterisierten Kurven α, β, γ regulär sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spuren von α, β, γ gleich den Lösungsräumen der Gleichungen

$$x^3 - y = 0, \qquad x^3 + x^2 - y^2 = 0, \qquad \text{und} \qquad x^3 - y^2 = 0, \qquad \text{mit} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

sind.

c) Skizzieren Sie die Spuren der Kurven α, β und γ.