Vorlesung 9

Beweis Prop. 3.2.2.

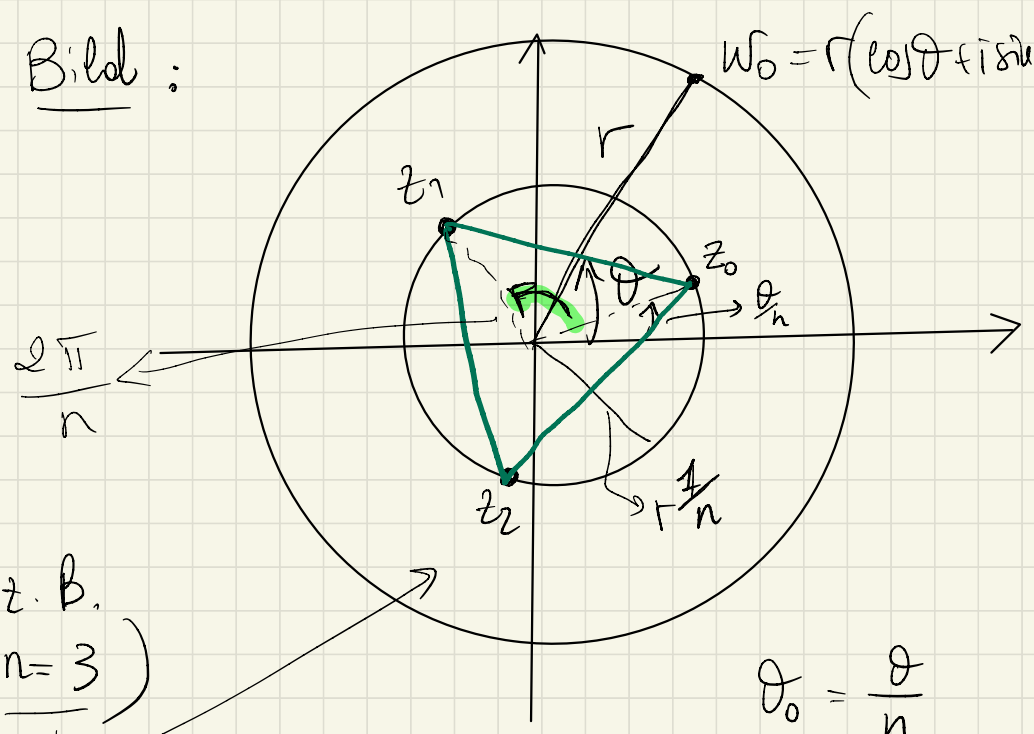
Kapitel 4 : Folgen

4.1.2. Reelle Folgen

Proposition 3.2.2
Es sei $w_0 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann hat das Polynom $P(z) := z^n - w_0$ genau n Nullstellen, wenn sie mit ihrer Vielfachheit gezählt werden. Insbesondere, falls $w_0 \neq 0$ und $w_0 = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, sind die Nullstellen gegeben durch

$$z_j = r^{\frac{1}{n}}(\cos\theta_j + \mathrm{i}\sin\theta_j), \quad \textit{wobei } \theta_j = \frac{\theta + 2\pi j}{n}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.2.3}$$

Bild:



(z. B. $n = 3$)

$\vartheta_0 = \frac{\vartheta}{n}$

$\vartheta_1 = \vartheta_0 + \frac{2\pi}{n}$

$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{2\pi}{n}$ ...

Beweis

$z \in \mathbb{C}$

* Falls $w_0 = 0$ $\quad \underline{z^n = 0} \Rightarrow z = 0$

* Falls $w_0 \neq 0 \rightsquigarrow w_0 = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$

Suchen $z : z^n = w_0$

Bem: $z \neq 0$ (sonst $0^n = 0 \neq w_0$)

Wir suchen alle R, ϕ : $z = R(\cos\phi + i\sin\phi)$

dann gilt $z^n = w_0$

$\Leftrightarrow$

(Formel de Moivre) $z^n = R^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$

$R^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$

$\|$ *

$r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

* gilt $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} R^n = r \\ n\phi = \vartheta + 2\pi \cdot K, \text{ für } K \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftarrow$ gilt $\iff$ $\begin{cases} R^n = r \\ n\phi = \theta + 2\pi \cdot k, \text{ für } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\downarrow$

$$\phi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\hookrightarrow P_k := R(\cos\phi_k + i \sin\phi_k)$

Bmk: Falls $\phi_{k'} - \phi_k = 2\pi \cdot m$, für ein $m \in \mathbb{Z}$

$\iff P_k = P_{k'}$

$\phi_{k'} - \phi_k = 2\pi \cdot m \iff \frac{\theta + 2\pi \cdot k'}{n} - \frac{\theta + 2\pi \cdot k}{n} = 2\pi \cdot m$

$\iff \frac{2\pi}{n}(k' - k) = 2\pi \cdot m \iff$

$\iff \boxed{k' - k = n \cdot m}$

Wir haben bewiesen, dass

$$P_k = P_{k'} \iff k' - k = n \cdot m$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

$$(k, k' \in \mathbb{Z})$$

Zu beweisen: Für $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ erhalten wir alle mögliche Punkte P_k

d.h. $\forall\, k'$, $\exists\, k \in \{0, \dots, n-1\}$, sodass

$$k' - k = n \cdot m$$

$$\forall\, k', \exists!\, k, m' \in \mathbb{Z}$$

$$k' = n \cdot m' + k \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

k: Rest der Division durch n

$$P_k := R(\cos \phi_k + i \sin \phi_k)$$

$$R = r^{\frac{1}{n}}, \quad \phi_k = \frac{\theta + 2\pi \cdot k}{n}$$

$$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$\blacksquare$

Beispiel:

$z^3 + 1 = 0$ $\qquad w_0 = -1$

$z^3 - (-1) = 0$

$w_0 = 1 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi))$

$r = \sqrt[3]{1} = 1$

$z_0 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

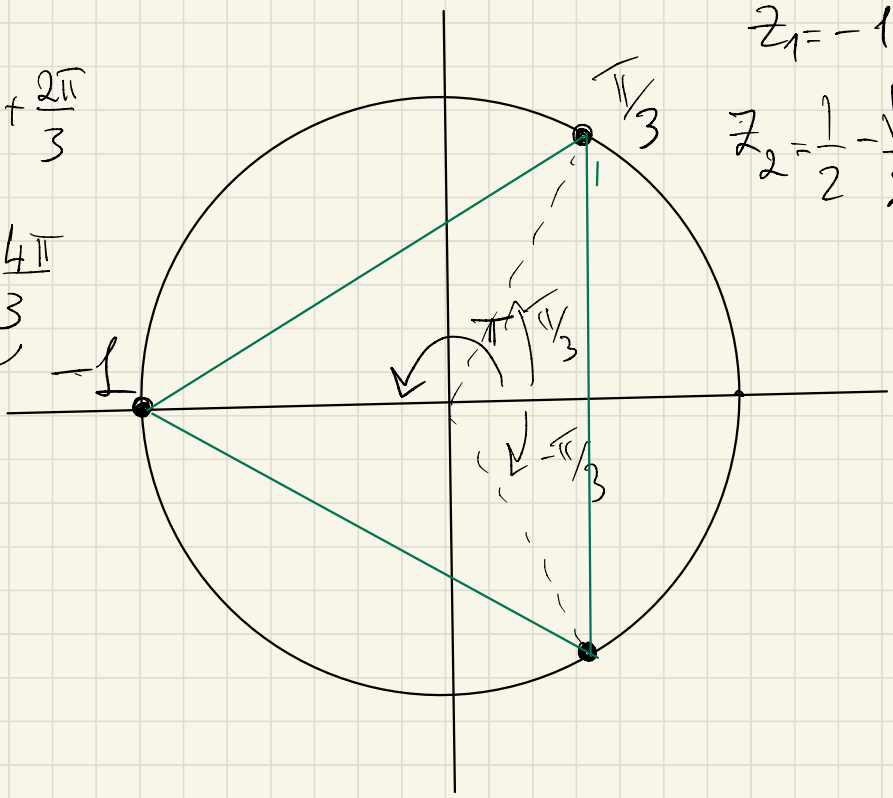
$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

$z_1 = -1$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$

$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\varphi_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}$



Kapitel 4: Folgen

Eine Folge $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$

Definition 4.1.1
Eine **Folge** komplexer (bzw. reeller) Zahlen ist eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen ist, und deren Zielmenge die Menge komplexer (bzw. reeller) Zahlen ist, d.h. $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (bzw. $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

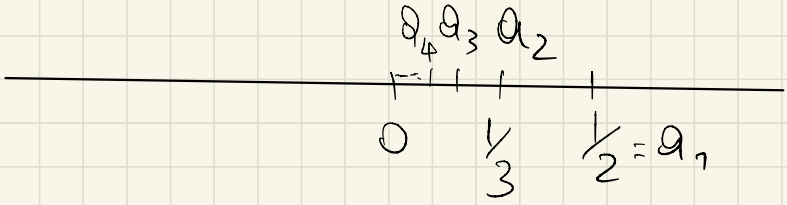
z.B.: $a_n = \frac{1}{n+1}$ reelle Folge

$a_n = \cos(n) + i \sin(n)$ Komplexe Folge

n prop

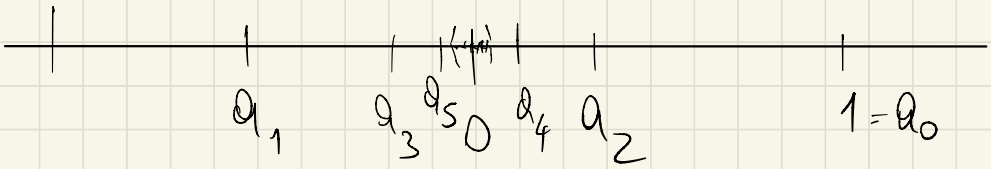
$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{C}$ $\in \mathbb{R}$

$a_n = \frac{1}{n+1}$



... Was uns interessiert ist der "VERLAUF" der Folge für n groß ...

Z.B.: $a_n := (-1)^n \frac{1}{n+1}$ $\quad n \in \mathbb{N}$



$n=0 \rightarrow 1$

$n=1 \rightarrow -\frac{1}{2}$

$n=2 \rightarrow \frac{1}{3}$

$n=3 \rightarrow -\frac{1}{4}$

Definition 4.1.2
Eine Folge $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt **konvergent**, falls es eine $l \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

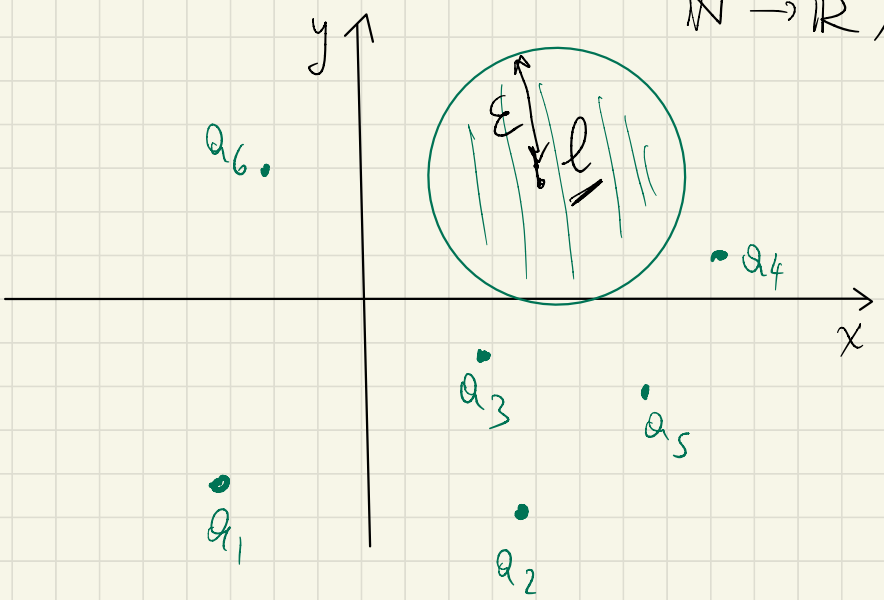
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon), \quad \text{sodass } |a_n - l| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0. \tag{4.1.1}$$

Der Wert l heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \text{oder} \quad a_n \to l.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt **divergent**.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\rightsquigarrow$ Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$)



$D_\varepsilon(l) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - l| < \varepsilon \}$

Umgebung von l

Beck: Die Bedingung:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n_0(\varepsilon)$, sodass $\forall \ n \geq n_0$ ist $|a_n - l| < \varepsilon$ ☆

muss nur für kleine ε bewiesen werden

Für $\varepsilon \leq 1$ ☆ ✓

$\forall \ \varepsilon' > \varepsilon$

$$|a_n - l| < \varepsilon < \varepsilon'$$

$\forall \ n \geq n_0(\varepsilon)$

$$n_0(\varepsilon') := n_0(\varepsilon)$$

$\forall \ n \geq n_0(\varepsilon') = n_0(\varepsilon)$

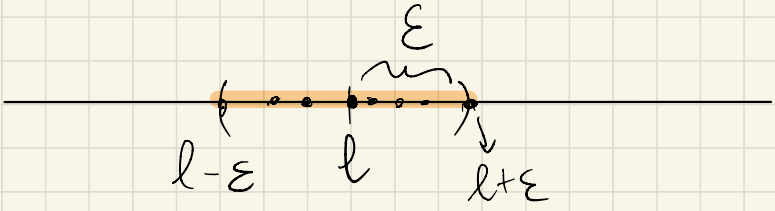
$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ reelle Folge

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, sodass $\forall n \geq n_0$

$|a_n - \ell| < \varepsilon$ $\quad \ell \in \mathbb{R}$

Abstand zwischen a_n & ℓ

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$



$$D_\varepsilon(x) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \ell| < \varepsilon\}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\varepsilon < x - \ell < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$$

Beispiele

* $a_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$

Behauptung: $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underline{n_0 = n_0(\varepsilon)}$, sodass

$$|a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall \underline{n \geq n_0}$$

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$ (AA)

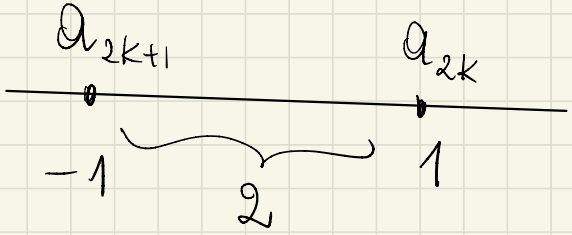
$\forall n \geq n_0$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

* $a_n := (-1)^n$

$$* \quad a_n := (-1)^n$$

Behauptung: a_n konvergiert nicht!



$$|a_n - a_{n+1}| = 2$$

Aber, falls a_n konvergieren würde,

$$|a_n - a_{n+1}| = |a_n - \ell + \ell - a_{n+1}| \leq$$

$$\overset{\shortparallel}{2} \leq |a_n - \ell| + |a_{n+1} - \ell| < 2\varepsilon$$

$$\forall\, n \geq n_0 + 1$$

$$2 < 2\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

Lemma 4.1.1

Es sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, die nach $l \in \mathbb{C}$ konvergiert. Dann, für alle $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|l| - \epsilon < |a_n| < |l| + \epsilon\,. \tag{4.1.3}$$

Beweis:

$a_n \to l \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$

$\forall\, n \geq n_0 \qquad |a_n - l| < \varepsilon$

Wir haben bewiesen

$$\big|\,|a_n| - |l|\,\big| \leq |a_n - l| < \varepsilon$$

Gegeben $b \in \mathbb{R}$ $\quad |b| < \varepsilon \iff$

$-\varepsilon < b < \varepsilon$

$b = |a_n| - |l|$

$$-\varepsilon < |a_n| - |l| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|l| - \varepsilon < |a_n| < |l| + \varepsilon$$

∎

Proposition 4.1.2
Es sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge.

(i) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

(ii) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. dass ein $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ exisiert, sodass $|a_n| < R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $l \neq 0$ konvergiert, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \neq 0$ für alle $n > N$.

Beweis:

(i) Widerspruchbeweis: mit $l_1 \neq l_2$

Angenommen $l_1, l_2 \in \mathbb{C}$, sodass

$a_n \to l_1$ und $a_n \to l_2$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_1 = n_1(\varepsilon)$ sodass $\forall n \geq n_1$ $|a_n - l_1| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_2 = n_2(\varepsilon)$ sodass $\forall n \geq n_2$ $|a_n - l_2| < \varepsilon$

Da $l_1 \neq l_2$ $\quad |l_1 - l_2| =: d > 0$

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq$$

$$\leq |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon \quad (\bar{d})$$

$\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$

(ii) Zu bew.: $a_n \to \ell \Rightarrow a_n$ beschränkt:

$\exists R > 0 : |a_n| < R \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ⌟

Erinnerung: Lemma 4.1.1:

$a_n \to \ell$ denn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n \geq n_0$

$|\ell| - \varepsilon < |a_n| < |\ell| + \varepsilon$ ⌟

1. Bemerkung: $\varepsilon = 1 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0$

$|a_n| < |\ell| + 1$

$R := \text{Max}\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |\ell|+1\}$

$|a_n|$

$\Rightarrow |a_n| \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N}$

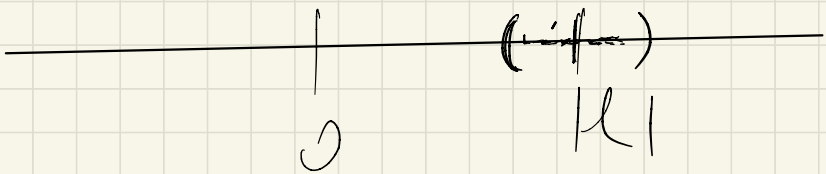
(iii) Zu beweisen: Falls $a_n \to \ell \neq 0 \Rightarrow$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \; a_n \neq 0 \;\; \forall\, n \geq n_0$

Erinnerung: Lemma 4.1.1:

$a_n \to \ell$ dann $\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$

$$|\ell| - \varepsilon < |a_n| < |\ell| + \varepsilon$$



$\ell \neq 0 \Rightarrow |\ell| > 0$

Für $\varepsilon < |\ell|$, $\forall n \geq n_0$

$$0 < |\ell| - \varepsilon < |a_n|$$

$$|a_n| > 0 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$$

▨

Proposition 4.1.3
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, mit $a_n \to l$ und $b_n \to l'$. Dann gelten

1. $a_n + b_n \to l + l'$;
2. $\lambda a_n \to \lambda l$, *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$;
3. $a_n \cdot b_n \to l \cdot l'$;
4. *Falls* $l' \neq 0$, *existiert ein* N, *sodass die Folge* $\frac{a_n}{b_n}$ *wohldefiniert ist für alle* $n \geq N$, *und konvergiert gegen* $\frac{l}{l'}$.

Beweis

1. $a_n \to l$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$, sodass $\forall n \geq n_0 \; |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($\varepsilon/2$)

$b_n \to l$:

↳ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0' = n_0'(\varepsilon)$, sodass $\forall n \geq n_0' \; |b_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|a_n + b_n - l - l'| = |(a_n - l) + (b_n - l')| \leq$$

$$\leq |a_n - l| + |b_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$N = N(\varepsilon) := \max\{n_0, n_0'\}$

Bsp: Die konstante Folge $a_n := a \; \forall n$ konvergiert gegen a ($|a_n - a| = 0 < \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0$)

$N := \max\{n_0, n_0'\}$ $< L\left(\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2L}\right) = \varepsilon$ $\forall n \geq N$

2 : Übung

3 : (z.b: $a_n \to l$, $b_n \to l' \Rightarrow a_n \cdot b_n \to l \cdot l'$

[Erinnerung: Prop. 4.1.2. 2. : $\exists R > 0$: $(a_n \to l \Rightarrow |a_n| < R \quad \forall n \in \mathbb{N})$]

$|a_n \cdot b_n - l l'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - l l'| =$

$= |a_n(b_n - l') + l'(a_n - l)| \leq$

$\leq |a_n| \cdot |b_n - l'| + |l'||a_n - l| <$

$< R \cdot |b_n - l'| + |l'||a_n - l| \leq L(|a_n - l| + |b_n - l'|)$

$L := \text{Max}\{R, |l'|\}$

(*) $a_n \to l \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, sodass $\forall n \geq n_0$ $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2L}$]

(*) $b_n \to l$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0' = n_0'(\varepsilon) : \forall n \geq n_0'$ $|b_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2L}$]

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N (= \max\{n_0, n_0'\}) :$

$\forall n \geq N$

$|a_n \cdot b_n - \ell \cdot \ell'| < \varepsilon$

4.

Zu beweisen: $a_n \to \ell$, $b_n \to \ell'$

Falls $\ell' \neq 0 \Rightarrow \exists N$: $\frac{a_n}{b_n}$ wohldefiniert ist, $\forall n \geq N$

und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$

[Erinnerung: Prop. 4.1.2. (iii)

$a_n \to \ell \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0 \quad \forall n \geq N$

$\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$

Zu zeigen: $b_n \neq 0$ $\forall n$ groß genug

$b_n \to \ell' \neq 0$ Prop 4.1.2. (iii) $\Rightarrow b_n \neq 0$ $\forall n$ großgen.

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right)$$

Es genügt zu beweisen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{\ell'}$

[3. $a_n \to \ell$, $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{\ell'} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$]

$b_n \to \ell'$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$: $|b_n - \ell'| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$

$|b_n - \ell'| \leq \varepsilon$ $\rightsquigarrow$ $\frac{|\ell'|^2 \tilde{\varepsilon}}{2}$

Lemma 4.1.1.

$$|b_n| > |\ell'| - \varepsilon$$

Вид: $\varepsilon < \frac{|\ell'|}{2} \Rightarrow |b_n| > |\ell'| - \varepsilon > \frac{|\ell'|}{2}$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell'} \right| = \left| \frac{\ell' - b_n}{b_n \cdot \ell'} \right| = \frac{|b_n - \ell'|}{|\ell'| \cdot |b_n|} <$$

$$< \frac{2\varepsilon}{|\ell'| \cdot |\ell'|} = \frac{2\varepsilon}{|\ell'|^2} = \tilde{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

$$\varepsilon = \frac{|\ell'|^2 \tilde{\varepsilon}}{2}$$

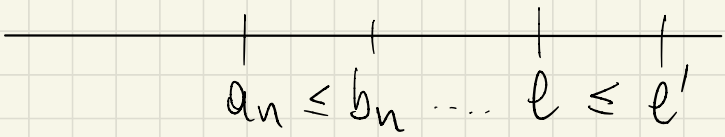
$$\varepsilon \rightsquigarrow \frac{|\ell'|^2 \tilde{\varepsilon}}{2}$$

4.1.2 Reelle Folgen

$$a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

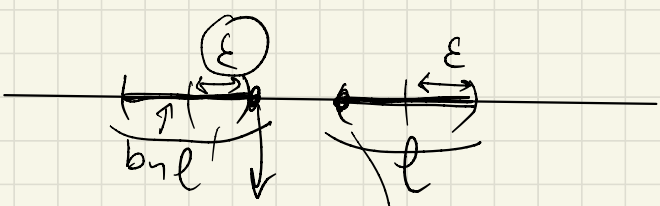
Lemma 4.1.4
Es seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Folgen, die gegen l (bzw. l') konvergieren. Nehmen wir an, dass $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$, für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $l \leq l'$.

Beweis



Widerspruchbeweis

Angenommen: $l' < l$



$l'+\varepsilon \mid l-\varepsilon$

ε Klammerung: $l' + \varepsilon < l - \varepsilon \iff$

$$\varepsilon < \frac{l + l'}{2}$$

ε: $\ell' + \varepsilon < \ell - \varepsilon$

$b_n \to \ell' : \forall n \geq n_0' :$

$$\ell - \varepsilon < b_n < \ell' + \varepsilon$$

$a_n \to \ell : \forall n \geq n_0$

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{n_0, n_0'\}:$

$$b_n < \ell' + \varepsilon < \ell - \varepsilon < a_n$$

$$b_n < a_n$$

aber für $n \geq N$ ist $a_n \leq b_n$

$\rightarrow \max\{N, n_0, n_0'\}:$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n < a_n \\ a_n \leq b_n \end{array} \right\} \text{ Widerspruch}$$

□

Lemma 4.1.5
Es sei (a_n) eine Folge, die nach $l > 0$ konvergiert. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$, gilt $a_n > 0$.

Übung

Definition 4.1.3
Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$ (bzw. gegen $-\infty$), falls

für alle $N \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n > N$ (bzw. $a_n < N$), für alle $n \geq n_0$.

Wir schreiben $a_n \to \infty$ (bzw. $a_n \to -\infty$) oder $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$).

Bem: Falls $a_n > 0 \ \forall n$

$a_n \to l$

$\not\Rightarrow \underline{l > 0}$

$\rightsquigarrow a_n = \frac{1}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$