Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
30.6.2016

Topologie: Übungsblatt 11

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 7.7.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10+10 Punkte)

Sei $g \in \mathbb{N}$. Sei Σ_g die orientierbare Fläche, die entsteht, wenn man den Rand eines $4g$-gons durch das Wort

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

identifiziert. Sei $\tilde{\Sigma}_g$ die nicht orientierbare Fläche, die durch Identifikation des Randes eines $2g$-gons durch das Wort

$$a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2$$

entsteht.

a) Zeigen Sie, dass $\pi_1(\Sigma_g) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \,|\, [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$, wobei $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$.

b) Zeigen Sie, dass $\pi_1(\tilde{\Sigma}_g) \cong \langle a_1, \dots, a_g \,|\, a_1^2 \cdots a_g^2 \rangle$.

Aufgabe 2. (5+10+10+5 Punkte)

Erinneren Sie sich, dass Σ_g die orientierbare Fläche von Geschlecht g bezeichnet und $\tilde{\Sigma}_g$ die nicht orientierbare Fläche von Geschlecht g. Wir definieren $\Sigma_0 = S^2$ die zwei dimensionale Sphäre.

Satz 1. *Sei S eine geschlossene Fläche. Dann ist S homöomorph zu Σ_g oder $\tilde{\Sigma}_g$ für ein g. Für jedes g, g' mit $g \neq g'$ gilt*

$$\Sigma_g \ncong \Sigma_{g'}, \qquad \tilde{\Sigma}_g \ncong \tilde{\Sigma}_{g'}$$

und für alle g, g' gilt, dass $\Sigma_g \ncong \tilde{\Sigma}_{g'}$.

In dieser Aufgabe beweisen wir einen Teil dieses Klassifikationssatzes von Flächen, nämlich dass die Flächen Σ_g und $\tilde{\Sigma}_g$ nicht homöomorph sind.

a) Für eine Gruppe G bezeichne $G_{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ die Abelisierung. Zeigen Sie, dass wenn $G \cong H$ gilt, dann auch $G_{\mathrm{ab}} \cong H_{\mathrm{ab}}$.

b) Zeigen Sie, dass
$$\pi_1(\Sigma_g)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

c) Zeigen Sie, dass
$$\pi_1(\tilde{\Sigma}_g)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Hinweis : Zeigen Sie, dass in einer abelschen Gruppe die Identität $a_1^2 \dots a_n^2 = (a_1 \dots a_n)^2$ *gilt.*

d) Zeigen Sie, dass für jedes g, g' mit $g \neq g'$
$$\Sigma_g \ncong \Sigma_{g'}, \qquad \tilde{\Sigma}_g \ncong \tilde{\Sigma}_{g'}$$
gilt und für alle g, g' gilt, dass $\Sigma_g \ncong \tilde{\Sigma}_{g'}$.