

Tutorium 9



$$* \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Die Exponentialfunktion wandelt Summen in Produkte (um).

Wir wollen beweisen, dass sie die einzige Funktion ist, die dies tut:

$(\mathbb{R}, +)$ Gruppe

$\rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppe

$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \rightarrow$ Gruppe

$$1 \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

$$\underbrace{f(x) = a^x}$$

$$a \neq 1, a > 0$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f: (G_1, *) \rightarrow (G_2, \circ)$$

$$[f(g * h) = f(g) \circ f(h)]$$

f (Gruppen) homomorphismus

und f (Exponentialfunktion) ist
 ein Gruppenhomomorphismus
 $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$!

Übung 1: Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, nicht konstante Funktion, sodass

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Beweisen Sie, dass $f(x) = a^x$ für ein $a > 0$
 $a \neq 1$

Hinweise:

- (a) Was kann $f(0)$ sein?
- (b) Beweisen Sie, dass $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (c) Schließen Sie, dass $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (d) Es sei $f(1) := a$. Beweisen Sie, dass

1. $f(n) = a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. $f(n) = a^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

3. $f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

4. $f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(a) Was kann $f(0)$ sein?

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ stetig} \\ f(x+y) \stackrel{(*)}{=} f(x) \cdot f(y) \end{array} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{l} f(0+x) \stackrel{(*)}{=} f(0) \cdot f(x) \\ \parallel \\ f(x) \end{array} \right]$$

Bemk : $\boxed{f(x) = f(0) \cdot f(x)} \quad (*) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Falls } f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{aber, wir haben angenommen,} \\ \text{dass } f \text{ nicht konstant ist} \\ \Rightarrow f(0) \neq 0 \end{array} \right.$$

• Nun zu schließen, dass
 $f(0) = 1$, wir müssen
beweisen, dass $\exists x_0 \in \mathbb{R}$

so dass $f(x_0) \neq 0$ weil, in diesem

Fall, $\exists f(x_0)^{-1}$ und deshalb

$$(*) \Rightarrow \underbrace{f(x_0)^{-1} \cdot f(x_0)}_{=1} = f(0) \cdot \underbrace{f(x_0)^{-1} \cdot f(x_0)}_{=1} \quad (f(0)=1)$$

⑦ Zu beweisen, $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq 0$ ist
Wir wissen schon, dass $f(0) \neq 0$

Falls $f(x) = 0 \quad \forall x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, dann

wäre f :

$$f(x) = \begin{cases} f(0) \neq 0 & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig in $x=0$

Alternativ

Aus $f(0) \neq 0 \xrightarrow{?} f(0) = 1$

$$\left[\underbrace{f(0)}_{\neq 0} = f(0+0) \stackrel{*}{=} \underbrace{f(0)}_{\neq 0} \cdot f(0) \right]$$

$$f(0) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$$

und in einer Gruppe

$$\boxed{f(0) = 1}$$

$$\left[\begin{array}{l} a = a * a \Rightarrow a = 1 \text{ (neutrales Element von } *) \\ \Rightarrow a^{-1} \underbrace{(a^{-1} * a)}_{\underset{||}{1}} = \underbrace{(a^{-1} * a)}_{\underset{||}{1}} * a = a \end{array} \right]$$

(b) Beweisen Sie, dass $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} * f(x+y) &= f(x) \cdot f(y) & \star \\ * f(0) &= 1 & \star \end{aligned} \quad \cdot f \text{ stetig}$$

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{*}{=} f(0) = f(x-x) = f(x+(-x)) = \\ &\stackrel{\star}{=} f(x) \cdot f(-x) \end{aligned}$$

$$1 = \underbrace{f(x)} \cdot f(-x) \quad \text{für einen } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} !$$

(c) Schließen Sie, dass $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \star f(x+y) = f(x) f(y) \\ \star f(0) = 1 \\ \star \text{Stetigkeit von } f \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (b) f(x) \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Idee: Falls $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) < 0 \Rightarrow f$ nicht stetig wäre

Zu beweisen: $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\neg (f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}) =$$

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) < 0$$

Wir wissen schon, dass

$$* f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$* f(0) = 1 > 0$$

* f stetig

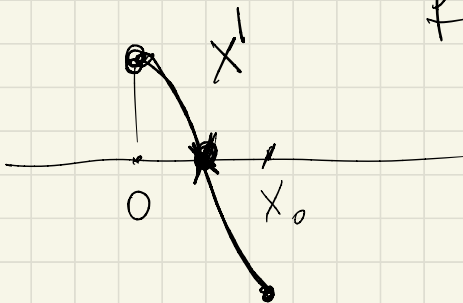
Falls $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) < 0$

$$f(0) = 1 > 0$$

Zwischenwertsatz

$$\Rightarrow \exists x' : f(x') = 0$$

das ist ein Widerspruch



(d) Es sei $f(1) := a$. Beweisen Sie, dass

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. f(n) = a^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 2. f(n) = a^n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ 3. f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 4. \underline{f(x) = a^x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$f(1) = a > 0$$

$$\underline{f(\underbrace{x+y}_{\star}) = f(x) \cdot f(y)}$$

$$\underline{1.} \quad \underbrace{f(n)}_{n \in \mathbb{N}} = \underbrace{f(1+1+\dots+1)}_{n\text{-Mal}} = \left(f(1)\right)^n = \underline{a^n}$$

$$\underline{2.} \quad f(-n) \stackrel{\text{zu bew.}}{=} a^{-n} \quad [f(0)=1]$$

$$f(n-n) = f(0) = 1$$

$\parallel \star$

$$f(n) \cdot f(-n) \Rightarrow f(-n) = \left(f(n)\right)^{-1} = \left(a^n\right)^{-1} = a^{-n}$$

3. Zu beweisen, dass $f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}$ $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\underbrace{f(1)}_{=a} = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-Mal}}\right) \stackrel{\star}{=}$$

$$\stackrel{\star}{=} \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \Rightarrow \underset{\star}{f\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

(wir haben auch benutzt, dass $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$)

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{p\text{-Mal}}\right) =$$

$$\stackrel{\star}{=} \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}}$$

4. $x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a^x$

↳ Benutzen wir die Stetigkeit!!

$$\underbrace{(x_n) \subseteq \mathbb{Q}}_{(a^{x_n})} \quad x_n \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} x \quad \Rightarrow \quad x_n \rightarrow x$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{(a^{x_n})}_{a^x} \rightarrow \underline{a^x}$$

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) =$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a)$
 ↑
 stetigkeit

$$\textcircled{x_n} : \quad \underline{x_n \rightarrow x} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(x_n) \rightarrow f(x)}_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n)$$

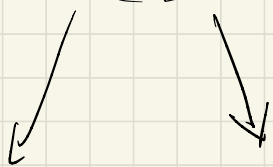
Übung 2 : Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

differenzierbar in $x_0 = 0$?

f differ. in $x_0 = 0 \iff$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existiert und endlich ist



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} () \quad | \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} ()$$

$$\frac{x < 0 \quad x > 0}{0}$$

Gegeben eine Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}$
 x_0 Häufungspunkt von I ist

$$* \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = l^+ \in \mathbb{R} : \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x : \underline{(x_0, x_0 + \delta) \cap I}$$

$$\text{gilt } \underline{|f(x) - l|} < \varepsilon$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = l^- \in \mathbb{R} : \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \underline{(x_0 - \delta, x_0) \cap I}$$

$$\text{gilt } \underline{|f(x) - l|} < \varepsilon$$

Lemmas (Übung)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \quad \text{existiert} \iff$$

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$ existieren und
gleich sind. In diesem Fall $l = l^- = l^+$

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^a \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Lemma + $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$:

f differenzierbar in $x_0 = 0$ ist $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Lemma + $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$:

f differenzierbar in $x_0 = 0$ ist $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Deshalb:

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0$?

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?

Für $a-1 > 0$ ($\Leftrightarrow a > 1$) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-1} = 0$

Übung: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$(x_n) = 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^n}_{< 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 10^n = +\infty$

$\nrightarrow \left(\underline{f(x_n)} \rightarrow +\infty \right)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht

Übung

$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) \text{ existiert nicht} \Rightarrow \right)$

↓
Wir haben $(a_n), (b_n) : a_n \rightarrow +\infty$
 $b_n \rightarrow +\infty$
aber $\sin(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$
 $\sin(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l', \underline{l \neq l'}$

$$a_n = n \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \sin(a_n) = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0$$

$$b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \sin(b_n) = 1 \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0 ?$$

Idee : für $a > 1$, Konvergenz

$$\left(x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \rightarrow 0$$

Worum?

Bemk : $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$

Für $a > 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{\left| x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}_{\downarrow x \rightarrow 0^+} \leq \underbrace{\left| x^{a-1} \right|}_{\downarrow x \rightarrow 0^+ \rightarrow 0} \leq 0$$

Das beweist, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| x^{a-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{a-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{!}{=} 0 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (0, \delta) \cap I$$

$$\left| x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| < \varepsilon$$

$\iff$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0$$

Wir haben bewiesen, dass $\forall a > 1$
ist f differenzierbar mit Ableitung

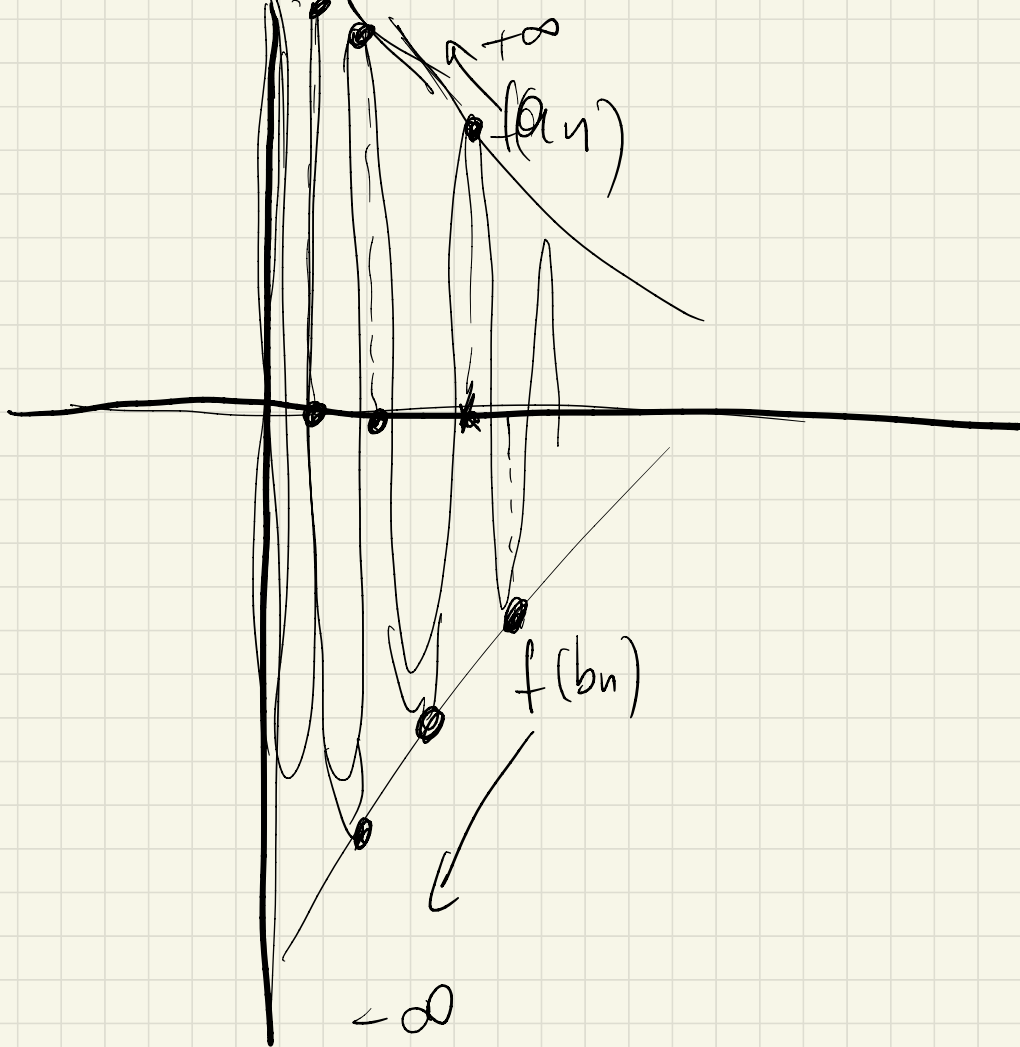
$$f'(0) = 0$$

Wir müssen noch beweisen, dass

für $a \leq 1$ existiert $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{a-1} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

nicht

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



Idee: Finden Sie zwei Folgen $(a_n), (b_n)$

$$a_n \rightarrow 0^+ \quad b_n \rightarrow 0^+$$

$$\frac{1}{a_n} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \frac{1}{b_n} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

$\downarrow$ $\neq$ $\downarrow$
 e $\neq$ e'

Übung 3 : Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die differenzierbar in $x \in (a, b)$.

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert in Bezug auf $f'(x)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \quad \swarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \parallel$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$= \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + \left(\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right)$$

$$\downarrow \quad h \rightarrow 0$$
$$f'(x)$$

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right) = f'(x)$$

y //

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{(-h)} = f'(x)$$

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$y \rightarrow x \quad y - x$$

$$y = (x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} x$$

$$y = x - h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x$$

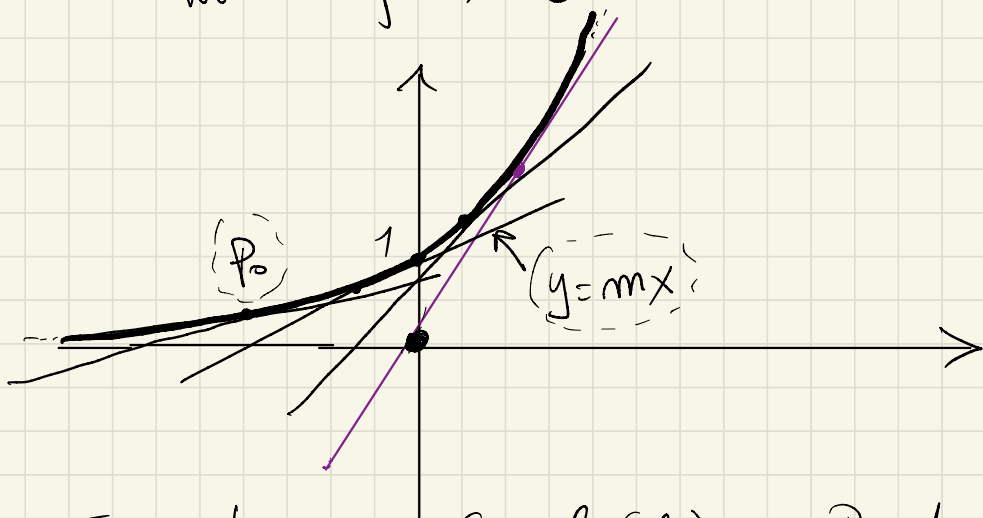
$$\frac{f(x) - f(x)}{x}$$

$$\frac{f(x) - f(x)}{x}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2 f'(x)$$

Aübung 4: Bestimmen Sie, für welchen Wert von m die Gerade $y = mx$ tangential zu $\text{Graph}(f)$, wobei $f(x) = e^x$



Tangente zu $\text{Graph}(f)$ in Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ist

$$y - \underline{f(x_0)} = \underline{f'(x_0)}(x - \underline{x_0})$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(x_0) = e^{x_0}$$

$$y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$$

$$y - e^{x_0} = e^{x_0} (x - x_0)$$

Tangente an Graph (f) in Punkt
 (x_0, e^{x_0})

Zu finden: $m \in \mathbb{R}$, sodass

$$\{(x, y) : y = e^{x_0} + e^{x_0} (x - x_0)\} = \tau_{p_0}$$

=

$$\{(x, y) : y = m \cdot x\} = \ell$$

$$y = e^{x_0} \cdot x + \boxed{(e^{x_0} - e^{x_0} \cdot x_0)}$$

$e^{x_0} - e^{x_0} \cdot x_0$ muss Null sein, damit
 τ_{p_0} durch den Ursprung läuft

$$e^{x_0} - e^{x_0} \cdot x_0 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{x_0} (1 - x_0)} = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{e^{x_0}}_a : \underbrace{(1-x_0)}_b = 0 \quad \star$$

$$(1) \left[\forall x \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = 0 \iff \begin{matrix} a=0 \\ \text{oder} \\ b=0 \end{matrix} \right]$$

$$(2) \left[e^{x_0} > 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \right]$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ $x_0 = 1$ die einzige Lösung $\star$ ist!

$$\{(x, y) : y = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0)\} = \tau_{p_0}$$

Für $x_0 = 1$

$$\underline{y = e + e(x-1) = e \cdot x = mx}$$

$m = e$

Übung 5 : Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine
stetige injektive Abbildung

* Was ist $f([a, b])$?

(i) Beweisen Sie, dass $f^{-1}: f([a, b]) \rightarrow [a, b]$
stetig ist $\iff f$ eine "abgeschlossene
Abbildung ist", d.h.

$f(A)$ abgeschlossen in $f([a, b])$, $\forall A$
abgeschlossen
in $[a, b]$

(ii) Beweisen Sie, dass $f: [a, b] \rightarrow f([a, b])$
abgeschlossen ist, und deshalb
ist $f^{-1}: f([a, b]) \rightarrow [a, b]$ stetig