Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
10.1.2018

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 12

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch 17.1.18 11:55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind nicht möglich.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}$ der Torus, der durch Rotation der Kurve

$$c(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) + R \\ 0 \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$

um die z-Achse entsteht. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Christoffel-Symbole auf zwei Arten ausgerechnet werden können: Mit Formel (4.1) und Lemma 4.2.14 in Bärs Buch[1]. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole des Torus T auf beide Arten.

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Sei S die reguläre Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Wir wollen die Christoffel-Symbole der Parametrisierung $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ ausrechnen.

a) Erklären Sie, warum man aus den Symmetrieeigenschaften dieser Fläche alle Christoffelsymbole einfach ausrechnen kann, falls man

$$\Gamma^x_{xx}, \qquad \Gamma^x_{xy}, \qquad \text{und} \qquad \Gamma^x_{yy}$$

kennt.

b) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole von S.

---

[1] Formel (4.1) und Lemma 4.2.1 im ersten Druck

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei S eine reguläre Flache, und seien $X, Y, Z : S \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder auf S. Sei $[X, Y]$ die Lie-Klammer der Vektorfelder X und Y.

a) Gilt
$$[fX, Y] = f[X, Y]$$
für jede glatte Funktion $f : S \to \mathbb{R}$? Zeigen Sie, dass diese Formel korrekt ist, oder geben Sie ein Gegenbeispiel und eine korrekte Formel für $[fX, Y]$ an.

b) Zeigen Sie, dass
$$[X, Y] = -[Y, X].$$

c) Zeigen Sie die Jacobi-Identität:
$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Aufgabe 4. (15 Punkte)

Betrachten Sie die sogenannte Enneperfläche, gegeben durch die Parametrisierung
$$x(u, v) = \big(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\big),$$
und zeigen Sie:

(a) Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind
$$g_{11} = g_{22} = (1 + u^2 + v^2)^2,\ g_{12} = 0.$$

(b) Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind
$$L_{11} = 2,\ L_{22} = -2,\ L_{12} = 0.$$

(c) Die Hauptkrummungen sind
$$k_1 = -k_2 = 2/(1 + u^2 + v^2)^2.$$

(d) Die Krummungslinien sind die Koordinatenkurven.