Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
6.5.2016

Topologie: Übungsblatt 4

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 12.5.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Betrachten Sie $\mathbb{R}$ mit Euklidischer Topologie $\mathcal{E}$ und $\sim$ der Äquivalenzrelation gegeben durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}\,.$$

Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{E}_\pi)$ kompakt ist.
(Sie dürfen natürlich *nicht* benutzten, dass $(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{E}_\pi)$ homömorph zu $(S^1, \mathcal{E}_{S^1})$ ist!)

Aufgabe 2. (1+9 Punkte)

Betrachten Sie $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ auf X gegeben durch

$$\begin{aligned} P \sim Q :\Longleftrightarrow \quad & P = Q \textit{ oder} \\ & P = (x,a) \textit{ und } Q = (x,b), \quad x \in [0,1] \textit{ und } \{a,b\} = \{0,1\} \textit{ oder} \\ & P = (a,y) \textit{ und } Q = (b,y), \quad y \in [0,1] \textit{ und } \{a,b\} = \{0,1\} \textit{ oder} \\ & P = (0,0) \textit{ und } Q = (1,1) \textit{ oder} \\ & P = (0,1) \textit{ und } Q = (1,0). \end{aligned}$$

Wir betrachten den Quotientenraum $(X/\sim, \mathcal{E}_\pi)$, wobei $\mathcal{E}_\pi$ die Quotiententopologie ist, induziert von der (Teilraum) euklidischen $\mathcal{E}$ Topologie auf X.
Es sei $T := S^1 \times S^1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ mit Teilraumtopologie $\mathcal{E}_T$ induziert von der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^4$ und
$\widetilde{T} := \{(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{y_1^2+y_2^2} - 2\right)^2 + y_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ mit Teilraumtopologie $\mathcal{E}_{\widetilde{T}}$ induziert von der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^3$.

a) Skizzieren Sie die Teilmenge $\widetilde{T}$.

b) Beweisen Sie, dass die topologischen Räume $(X/\sim, \mathcal{E}_\pi)$, $(T, \mathcal{E}_T)$ und $(\widetilde{T}, \mathcal{E}_{\widetilde{T}})$ homöomorph sind.

(*Hinweis* : Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert als

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1+2)x_3, (x_1+2)x_4, x_2).$$

Was ist das Bild von T ?)

Aufgabe 3. (5+10 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wir definieren die Diagonale $\Delta_{X\times X}$ von X in $X \times X$ durch

$$\Delta_{X\times X} = \{(x, x) \subset X \times X\}$$

a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffsch ist, genau dann wenn $\Delta_{X\times X}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Sei $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffsch und $\sim$ eine Äquavilenzrelation auf X. Nehmen Sie an, dass die Abbildung

$$\pi : (X, \mathcal{T}) \to (X/\sim, \mathcal{T}_\pi)$$

offen ist, wobei $\mathcal{T}_\pi$ die Quotiententopologie ist. Sei $M_\sim \subset X \times X$ definiert durch

$$M_\sim = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}.$$

Eine Äquivalenzrelation ist dasselbe wie eine Menge $M_\sim$ mit den Eigenschaften : $\Delta_{X\times X} \subset M_\sim$ und $(x, y) \in M_\sim \Rightarrow (y, x) \in M_\sim$ und $(x, y), (y, z) \in M_\sim \Rightarrow (x, z) \in M_\sim$.

b) Zeigen Sie, dass $(X/\sim, \mathcal{T}_\pi)$ Hausdorffsch ist, genau dann wenn $M_\sim$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 4. (2+8 Punkte)

Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

a) Ist $\mathbb{R}/\sim$ Hausdorffsch ?

b) Beschreiben Sie die Topologie auf $\mathbb{R}/\sim$ explizit.

Aufgabe 5. (1+4+5 Punkte)

Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x = y \qquad \text{oder} \qquad x, y \in \mathbb{Z}$$

Betrachten Sie den topologischen Raum $(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{E}_\pi)$, wobei $\mathcal{E}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. Definieren Sie

$$H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \qquad \text{mit} \qquad K_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

Wir geben H die induzierte Teilraum Topologie $\mathcal{T}$ falls Unterraum von $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E})$.

a) Skizzieren Sie den Raum H.

b) Ist $(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{E}_\pi)$ kompakt ? Hausdorff ?

c) Ist $(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{E}_\pi)$ homöomorph zu $(H, \mathcal{T})$?