Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
18.11.2015

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 5

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 25.11.14 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (25 Punkte)

Seien $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, mit nicht-verschwindender Krümmung, und $(\underline{t}(t), \underline{n}(t), \underline{b}(t))$ das Begeleitende Dreibein von c, wobei $t \in I$. Wir wissen, dass $\underline{b}(t) = \underline{t}(t) \times \underline{n}(t)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\underline{t}(t) = \underline{n}(t) \times \underline{b}(t), \qquad \text{und} \qquad \underline{n} = \underline{b}(t) \times \underline{t}(t).$$

b) Seien $\phi : I \to I$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und $a = c \circ \phi$ eine Umparametrisierung der Kurve. Das begleitende Dreibein $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$ von a im Punkt s ist definiert als das begleitende Dreibein $(\underline{t}_c(t), \underline{n}_c(t), \underline{b}_c(t))$ von c im Punkt $t = \phi(s)$. In die Vorlesung ist gezeichnet dass

$$\underline{t}(s) = \frac{\dot{a}(s)}{\|\dot{a}(s)\|}, \qquad \underline{n}(s) = \frac{\|\dot{a}(s)\|^2 \ddot{a}(s) - \langle \dot{a}(s), \ddot{a}(s)\rangle \dot{a}(s)}{\|\dot{a}(s)\| \|\dot{a}(s) \times \ddot{a}(s)\|}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\underline{b}(s) = \frac{\dot{a}(s) \times \ddot{a}(s)}{\|\dot{a}(s) \times \ddot{a}(s)\|}.$$

c) Zeigen Sie, dass die Frenet-Gleichungen geschrieben werden können als

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{t}}(s) \\ \dot{\underline{n}}(s) \\ \dot{\underline{b}}(s) \end{pmatrix} = \|\dot{a}(s)\| \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t}(s) \\ \underline{n}(s) \\ \underline{b}(s) \end{pmatrix},$$

wobei $\kappa(s) := \kappa_c(t)$ und $\tau(s) := \tau_c(t)$, mit κ_c und τ_c die Krümmung und Windung von c.

d) Zeigen Sie das

$$k(s) = \frac{\|\dot{a}(s) \times \ddot{a}(s)\|}{\|\dot{a}(s)\|^3}.$$

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Sei die *Schraubenlinie* die Kurve parametrisiert durch

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} a\cos(s) \\ a\sin(s) \\ b\,s \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R} \qquad a > 0, \qquad b \neq 0.$$

a) Warum ist mann erlaubt die Formeln der Aufgabe 1 zu brauchen ?
b) Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$.
c) Berechnen Sie die Krümmung und die Windung der Kurve α.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Kurve parametrisiert durch

$$\beta(s) = \begin{pmatrix} s \\ \frac{1}{2}s^2 \\ \frac{1}{3}s^3 \end{pmatrix}.$$

a) Warum ist mann erlaubt die Formeln der Aufgabe 1 zu brauchen ?
b) Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$ der Kurve β.
c) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve β.