Prof. Silvia Sabatini
Dr. Alexander Caviedes Castro

ANALYSIS I
Übungsblatt 6

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 14.12.2020, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. Studieren Sie die Beispiele der Grenzwerte einer Folge auf den Notizen:
Beispiele 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4, 4.4.5, 4.4.6 auf Seiten 134 – 135.

Präsenzaufgabe 2. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen

1. $\sqrt{n} \cdot \sin(\frac{1}{n^\alpha})$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$. (Hinweis: $\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin(\frac{1}{n}) = 1$.)
2. $\dfrac{n!}{(n+1)! - (n-1)!}$
3. $\sqrt[3]{n^6 - n^\alpha + 1} - n^2$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$.
4. $\dfrac{n^\alpha}{1 + 2 + \ldots + n}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$.
5. $\dfrac{1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1}{1 + 2 + \ldots + n}$.
6. $\dfrac{n + 2^n}{n + n!}$

Hausaufgabe 1. (12= 4 (2+2)+ 6 (2+2+2) + 2 Punkte)

1. Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen.
   (a) Zeigen Sie, dass wenn es eine reelle Zahl $k, 0 < k < 1$, gibt, so dass
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$$
   gilt, dann
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
   gilt.

(b) Zeigen Sie, dass wenn es eine reelle Zahl $k, k > 1$, gibt, so dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > k$$

gilt, dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

gilt.

2. Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

gilt. Zeigen Sie, dass:

(a) wenn $l < 1$, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(b) wenn $l > 1$, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(c) Untersuchen Sie den Fall $l = 1$.

3. Benutzen Sie den vorherige Übung (Hausaufgabe 1.2) um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

für $a > 1$ gilt.

Hausaufgabe 2. (6 = 3 + 3 Punkte)
Zeigen Sie mittels Einschnürungssatz:

1.
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \right) = 0$$

2.
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

Hausaufgabe 3. (7 Punkte)
Zeigen Sei, dass wenn

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$$

gilt, dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + \ldots + a_n)}{n} = l$$

gilt.