Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
18.6.2018

Topologie: Übungsblatt 10

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 25.6.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (15 Punkte)

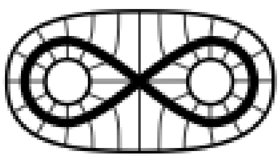
a) Sei M eine Mannigfaltigkeit von Dimension $n \geq 3$, und $x_0, p \in M$ mit $p \neq x_0$. Zeigen Sie, dass $\pi_1(M; x_0) \cong \pi_1(M \setminus \{p\}; x_0)$.

b) Seien M und N zwei wegzusamenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit $n \geq 3$. Sei $x_0, x_1 \in M\#N$ mit $x_0 \in M \cap (M\#N)$ und $x_1 \in N \cap (M\#N)$ ($M\#N$ bezeichnet die verbundene Summe, definiert in Übungsblatt 5). Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(M\#N; x_0) \cong \pi_1(M; x_0) * \pi_1(N; x_1).$$

Aufgabe 2. (15 Punkte)

a) Sei $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ die Scheibe $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sei $z_i \in D^2$ für $1 \leq i \leq n$, und nehmen Sie an, dass $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $D^2 \setminus \{z_1, \dots z_n\}$. Hinweis: Sehen Sie das Bild an



b) Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung von n Geraden durch den Ursprung. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3 \setminus X$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Es sei X ein wegzusammenhängender Raum, $x \in X$ und $\phi\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(X,x)$ ein Isomorphismus. Es sei $A \subset X$ eine wegzusammenhängende Teilmenge mit $x \in A$, so dass

$$\mathrm{Im}(\pi(A,x) \to \pi(X,x)) = \phi(2\mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie, dass A kein Retrakt von X ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

a) Besitzt der Torus $S^1 \times S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : \|x\| = \|y\| = 1\}$ der Satz von Borsuk-Ulam? Das heißt, für jede stetige Abbildung

$$f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2,$$

gibt es $(x,y) \in S^1 \times S^1$ sodass

$$f(x,y) = f(-x,-y) \ ?$$

b) Sei $g : S^2 \to S^2$ eine stetige Abbildung, sodass für jedes $x \in S^2$

$$g(x) \neq g(-x)$$

gilt. Zeigen Sie, dass g surjektiv ist.