Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
7.5.2018

Topologie: Übungsblatt 5

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montags 14.5.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Einhängung von X ist der topologische Raum $(\Sigma X := X \times [0,1]/\sim, \mathcal{T}_\pi)$, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X \times [0,1]$ definiert ist durch

$$(x,t) \sim (y,s) :\Longleftrightarrow (x,t) = (y,t) \quad \text{oder} \quad t = s = 0 \qquad \text{oder} \quad t = s = 1.$$

Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre mit der Teilraumtopologie. Zeigen Sie, dass $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Diese Aufgabe zeigt, dass die Mannigfaltigkeitsstruktur von der Wahl der Topologie abhängt.

a) Definieren Sie eine Topologie $\mathcal{T}_0$ auf $\mathbb{R}^n$, sodass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_0)$ eine null-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

b) Sei $0 < k \leq n$. Definieren Sie eine Topologie $\mathcal{T}_k$ auf $\mathbb{R}^n$, sodass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_k)$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3. (30 Punkte)

Seien M, N zwei n-dimensionale Mannigfaltigkeiten und $B_1 \subset M, B_2 \subset N$ n-dimensionale offene Kugeln, mit $\partial(M \setminus B_1) \cong S^{n-1}$ und $\partial(N \setminus B_2) \cong S^{n-1}$ und $h : \partial(M \setminus B_1) \to \partial(N \setminus B_2)$ ein Homöomorphismus. Wir definieren die verbundene Summe

$$M \# N := (M \setminus B_1 \cup N \setminus B_2)/\sim,$$

mit Quotiententopologie, wobei

$$\begin{aligned} x \sim y :\Longleftrightarrow\ & x = y \quad \text{oder,} \\ & y = h(x) \quad x \in \partial(M \setminus B_1) \quad \text{und} \quad y \in \partial(N \setminus B_2) \quad \text{oder,} \\ & x = h(y) \quad x \in \partial(N \setminus B_2) \quad \text{und} \quad y \in \partial(M \setminus B_1). \end{aligned}$$

Es kann gezeigt werden, dass $M\#N$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Betrachten Sie Σ_g, die orientierbare Fläche vom Geschlecht g, definiert als der Quotientenraum von einem Vieleck mit $4g$ Seiten mit Identifikation

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

In den folgenden Aufgaben ist es erlaubt eine Skizze zu geben, und zu sagen, wie diese Skizze zu einem Beweis bringt. Es ist hier *nicht notwendig* eine Formel für den Homöomorphismus zu geben.

a) Zeigen Sie, dass $\Sigma_g \cong \underbrace{\Sigma_1 \# \dots \# \Sigma_1}_{g}$. *Hinweis : Beschreiben Sie erst den Fall mit $g = 2$.*

b) Zeigen Sie, dass $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ homöomorph ist zum Vieleck mit 2 Seiten, mit Identifikation
$$aa^{-1}.$$

c) In der Vorlesung ist $\mathbb{R}P^2$ definiert als der Quotientenraum $S^2/\sim$ mit
$$x \sim y :\Longleftrightarrow x = \pm y$$
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^2$ homöomorph ist zum Vieleck mit zwei Seiten mit Identifikation
$$aa$$

d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^2 \backslash D \cong M$, wobei D eine offene Scheibe ist und M das Möbiusband ist.

Betrachten Sie die Kleinsche Flasche K, den Quotientenraum von einem Quadrat mit Identifikation
$$aba^{-1}b.$$

e) Zeigen Sie, dass K homöomorph zu $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ ist.