Prof. Silvia Sabatini
Dr. Alexander Caviedes Castro
Universität zu Köln
16.11.2020

ANALYSIS I
Übungsblatt 3

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 23.11.2020, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. Welche der folgenden Behauptungen ist wahr, und welche ist falsch, und warum ist es so (also: wenn Sie denken, dass die Behauptung wahr ist, müssen Sie sie beweisen; wenn falsch, müssen Sie ein Gegenbeispiel finden):

1. Die Summe von zwei rationalen Zahlen ist rational;
2. Die Summe von zwei irrationalen Zahlen ist irrational;
3. Die Summe einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl ist rational;
4. Das Produkt einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl ist rational;
5. Das Produkt von zwei irrationalen Zahlen ist irrational.

Präsenzaufgabe 2.

1. Beweisen Sie, dass die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ die folgende Tatsache impliziert:

   (*) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass $n > x$.

   (*Hinweis*: Widerspruchbeweis. Nehmen Sie an, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, mit $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann wäre die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ nach oben beschränkt. Es sei $s \in \mathbb{R}$ das Supremum, dann wäre $s - 1$ kein Supremum, und...).
2. Beweisen Sie, dass (*) äquivalent zum Archimedischen Axiom ist.
3. Beweisen Sie nochmal, dass $\mathbb{R}$ das Archimedische Axiom erfüllt, nun mit der Hilfe der Gaußklammernfunktion (mit $n = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor + 1$).

Präsenzaufgabe 3. Sei $A \subseteq \mathbb{Q}$ eine nach oben beschränkte Menge mit Supremum $\sup(A)$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? (Begründen Sie Ihre Antworte, d.h.: Falls die Antwort “Wahr” ist, müssen Sie die Behauptung beweisen; Falls die Antwort “Falsch” ist, müssen Sie ein Gegenbeispiel finden.)

1. $\sup(A)$ ist rational.

2. $\sup(A)$ ist irrational.

3. Wenn $\sup(A)$ rational ist, dann ist es auch ein Maximum von A.

Hausaufgabe 1. (11=4+3+4 Punkte)

1. Beweisen Sie, dass falls S ein Maximum (bzw. Minimum) s besitzt, dann besitzt S ein Supremum (bzw. Infimum), und $s = \sup S$ (bzw. $s = \inf S$).

2. Beweisen Sie, dass das Supremum (bzw. Infimum), wenn es existiert, eindeutig bestimmt ist.

3. Beweisen Sie, dass falls A und B nicht leere Teilmengen von X sind, mit $A \subseteq B$, und falls sie Suprema und Infima besitzen, dann ist

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Hausaufgabe 2. (6=3+3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Zahlen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ irrationale Zahlen sind.

Hausaufgabe 3. (8=2+2+2+2) Bestimmen Sie das Supremum bzw. das Infimum (sofern sie existieren) der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, und geben Sie an, ob dies ein Maximum bzw. ein Minimum der jeweiligen Teilmenge ist.

1. $\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x|x| < x^2\} \cup [-1, 1)$

3. $\{0\}$

4. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x^2 < 4\}$.

Extra Hausaufgabe 1. (+10=3+7 Punkte)

- Zu Beginn von Abschnitt 1.2.2 haben wir eine Menge mit zwei Elementen gegeben, $\mathbb{Z}_2 = \{G, U\}$ mit einer Addition $+$. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}_2, +)$ eine Gruppe ist. Definieren Sie eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}_2$, damit $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist. Überzeugen Sie sich selbst, dass es sinnvoll ist, das Element G mit 0 und das Element U mit 1 zu bezeichnen. Beweisen Sie, dass es keine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{Z}_2$ gibt, damit $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper ist.

- Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, wobei K endlich viele Elemente hat, d.h. $|K| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, mit $n > 1$. Beweisen Sie, dass es keine Ordnung auf K gibt, damit $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper ist.