Tutorium 5

Wichtige Grenzwerte:

- $a \in \mathbb{R}_{>0}$ $\quad \sqrt[n]{a} \to 1$ $\quad n \to +\infty$
- $\sqrt{n} \to 1$
- $a^n \to \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \\ \text{existiert nicht} & a \leq -1 \end{cases}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$
- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad (e \approx 2.718281\ldots)$
- $\frac{n^\alpha}{a^n} \to 0 \qquad a > 1 \quad \alpha > 0$

  $\rightsquigarrow$ „$\frac{\infty}{\infty}$"
- $\frac{a^n}{n!} \to 0$
- $\frac{n!}{n^n} \to 0$

Übung 4.4.2 der Notizen:

Es sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen.

1. Zeigen Sie, dass wenn $\exists k \in \mathbb{R} : 0 < k < 1$ und $\sqrt[n]{a_n} < k \quad \forall n \in \mathbb{N}$ dann $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

2. Zeigen Sie, dass wenn $\exists k \in \mathbb{R} : k > 1$ und $\sqrt[n]{a_n} > k$ dann $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

---

1. $\sqrt[n]{a_n} < k \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 < k < 1$

$$0 < a_n < k^n \qquad k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$0 \Rightarrow 0 \Leftarrow 0$$

2. $\sqrt[n]{a_n} > k > 1$

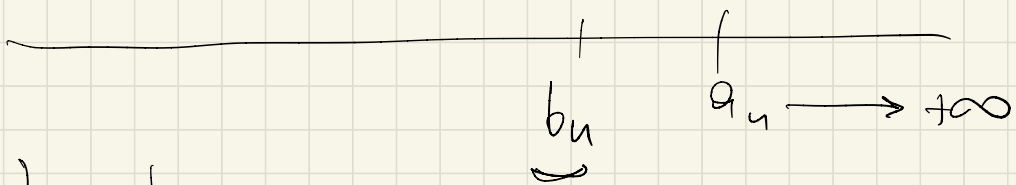
$\Downarrow$

$\star$ $\boxed{a_n > k^n}$ $\qquad k > 1$

$\star$ [(ii) $\quad a_n \geq b_n$, $\quad b_n \to +\infty$] $\star$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$

Bem: Falls $a_n \geq b_n$ & $a_n \to +\infty$,
können wir nicht schließen, dass
$b_n \to +\infty$



$b_n = b$

$a_n > k^n$ $\qquad$ weil $k > 1$

$\Downarrow$

$+\infty$

$\Rightarrow a_n \to +\infty$

Übung 4.4.3 der Notizen:

Es sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen, sodass

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Zeigen Sie (mit der Hilfe von Übung 4.4.2) dass

i) falls $\ell < 1$ dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) falls $\ell > 1$ dann $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Was für $\ell = 1$?

(i) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$ $\quad \left(\sqrt[n]{a_n} < \ell < 1\right)$

$\downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \; : \; \forall n \geq n_0$

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - \ell\right| < \varepsilon$$

$\iff$

$$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$$

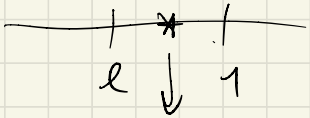
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0$

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - \ell \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$$

$\ell < 1 \quad \exists \tilde{\varepsilon} > 0 : \ell + \tilde{\varepsilon} < 1$

(ii) Übung für Sie



$\frac{\ell + 1}{2}$

$\Rightarrow \exists n_0 = n_0(\tilde{\varepsilon}) :$

$\forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} < \ell + \tilde{\varepsilon} < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n < (\ell + \tilde{\varepsilon})^n$

$a^n \quad < 1 \quad | \; a$

$\rightsquigarrow$ Einschnürungssatz

$$0 < a_n < (\ell + \tilde{\varepsilon})^n \qquad \forall n \geq n_0$$

$0 \Rightarrow 0 \Leftarrow 0$

$$\sqrt[n]{a_n} < 1$$

$$0 < a_n < 1^n = 1$$

$$0 < a_n < 1$$

Übung 3: Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen:

(1) $\lim_{n \to +\infty} (e^n - 2^n)$ (e: Eulersche Zahl)

(2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1} - 4^{n-1}}{3^n}$

(3) $\lim_{n \to +\infty} n^{-e}$ *

$n^2 < n^e < n^3$

$\Rightarrow \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^e} < \frac{1}{n^2}$

$\downarrow \quad \Rightarrow \quad \downarrow \quad \Leftarrow \quad \downarrow$

$0 \quad \Rightarrow \quad 0 \quad \Leftarrow \quad 0$

(4) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\pi} = 1$

(5) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2n} = 1$

$\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 1$

(6) $\lim_{n \to +\infty} (2^n - n!)$

n Fakultät

(7) $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n\,3^{n+1} + n^5 + 1) \cdot n!}{(3^n + 2^n)(n+1)!}$

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^n - 2^n)$

$3^n - 2^n \rightsquigarrow$ "$+\infty - \infty$"

$$e^n - 2^n = e^n \underbrace{\left(1 - \frac{2^n}{e^n}\right)}_{\to 1} \longrightarrow +\infty$$

$e^n \to +\infty$

"e^n konvergiert schneller gegen $+\infty$ als 2^n"

bedeutet

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{2^n} = +\infty \quad \text{oder} \\ \qquad\qquad\qquad \Updownarrow \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{e^n} = 0 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\left(\frac{e}{2}\right)}_{>1}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)}_{<1}^n \longrightarrow 0$$

Übung: Falls $a_n \to \ell$ konvergiert, $\ell \in \mathbb{R}$

$b_n \to +\infty$ divergiert

$a_n \cdot b_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \ell > 0 \\ -\infty & \ell < 0 \\ \text{wir können nichts sagen} & \ell = 0 \end{cases}$ (*)

$a_n \to 0$ $\quad b_n \to +\infty$

Z.B.: $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = n^2$ $\quad a_n \cdot b_n = n \to +\infty$ //

- $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad b_n = \alpha \cdot n^2$ $\quad a_n \cdot b_n = \alpha \to \alpha$ //

  $\alpha \in \mathbb{R}$

- $a_n = \frac{1}{n^3}$ $\quad b_n = n^2$ $\quad a_n \cdot b_n = \frac{1}{n} \to 0$ //

Bmk: "$0 \cdot \infty$" ist ein unbestimmter Ausdruck

(i) $a_n \xrightarrow{(*)} \ell > 0$ $\quad b_n \xrightarrow{(**)} +\infty$

Zu beweisen: $a_n \cdot b_n \longrightarrow +\infty$

(*) $a_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \;, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ sodass

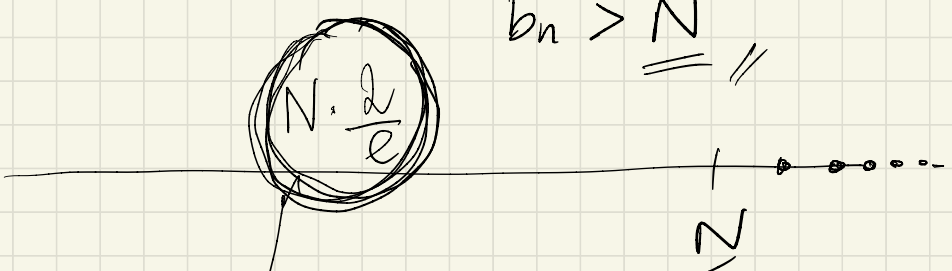
$$|a_n - \ell| < \varepsilon \iff$$

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

(**) $b_n \to +\infty \iff \forall N > 0 \;, \exists\, \tilde{n}_0 = \tilde{n}_0(N)$

sodass : $\forall\, n \geq \tilde{n}_0$

$$b_n > N$$



$n' := \text{Max}\{n_0, \tilde{n}_0\}$

Es sei ε : $\ell - \varepsilon > 0$ $\quad (z.B.\ \varepsilon = \frac{\ell}{2})$

$a_n > \ell - \varepsilon$ $\quad \forall\, n \geq n'$

$b_n > N$

$$\Rightarrow a_n \cdot b_n > (\ell - \varepsilon) \cdot N = \frac{N \cdot \ell}{2}$$

(2) $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2^{n+1} - 4^{n-1}}{3^n} \right]$

$2^{n+1} \longrightarrow +\infty \qquad (2^{n+1} = 2 \cdot 2^n)$

$4^{n-1} \longrightarrow +\infty \qquad (4^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 4^n)$

$3^n \longrightarrow +\infty$

" $+\infty - \infty$ "

" $\frac{+\infty - \infty}{+\infty}$ "

$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} - 4^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot 2^n - \frac{1}{4} \cdot 4^n = -\infty$

$4^n \left[-\frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 2^n}{4^n} \right] = 4^n \left[-\frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$

$+\infty \qquad -\frac{1}{4} \qquad 0$

$-\infty$

$$\frac{2^{n+1} - 4^{n-1}}{3^n} \longrightarrow -\infty$$

$$3^n \longrightarrow +\infty$$

"$\frac{-\infty}{+\infty}$"

$$\frac{4^n\left[-\frac{1}{4} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{3^n} =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^n \left[-\frac{1}{4} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \longrightarrow -\infty$$

$\left(\frac{4}{3}\right)^n \to +\infty$

$-\frac{1}{4} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \to -\frac{1}{4}$

(6) $\lim_{n\to+\infty} \left(2^n - n!\right)$

(7) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(n\,3^{n+1} + n^5 + 1\right)\cdot n!}{\left(3^n + 2^n\right)(n+1)!}$ ($n!$: n Fakultät)

(6) "$+\infty - \infty$"

" $n! \to +\infty$ schneller als 2^n $(\to +\infty)$ "

$\hookrightarrow \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{2^n} = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$

$$2^n - n! = -n!\left[1 - \frac{2^n}{n!}\right] \longrightarrow -\infty$$

$-n! \to -\infty$, $\dfrac{2^n}{n!} \to 0$, $1 - \dfrac{2^n}{n!} \to 1$

(7) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n\,3^{n+1}+n^5+1)\cdot n!}{(3^n+2^n)(n+1)!}$ → n Fakultät

$$= \frac{(n\cdot 3^{n+1}+n^5+1)\cdot n!}{(3^n+2^n)(n+1)\cdot n!}$$

$$= \frac{n^4}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{n^4}{3^n} \to 0$$

$(n+1)!$

$$= \underbrace{n\cdot 3^{n+1}}_{(n+1)\cdot 3^n}\cdot\left[1+\frac{n^5}{n\cdot 3^{n+1}}+\frac{1}{n\cdot 3^{n+1}}\right]$$

$$\left[1+\frac{2^n}{3^n\cdot(n+1)}\right]$$

$\frac{n^5}{n\cdot 3^{n+1}} \to 0$, $\frac{1}{n\cdot 3^{n+1}} \to 0$

$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \to 0$

$\left[1+\frac{2^n}{3^n\cdot(n+1)}\right] \to 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, $\frac{1}{(n+1)} \to 0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{(n+1)} \to 0$

$(n+1)\cdot 3^n \to 3$

$\left[1+\frac{2^n}{3^n\cdot(n+1)}\right] \to 1$

$3\cdot 1 = 3$

$$= \frac{n \cdot 3^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^n} = \frac{3 \cdot n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^n} \to 3$$

$$\frac{n}{n+1} \to \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left[1+\frac{1}{n}\right]} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

$$\frac{1}{n} \to 0$$

8. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$

$\frac{n+1}{n} \to 1$

"1^{∞}"

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \longrightarrow e$ Eulersche Zahl

monoton steigende, beschränkte Folge, und deshalb konvergiert sie gegen $\sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\} =: e$

Wir schreiben:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$\to e \cdot e$

$= e^2$

Übung 4

Prop. f, g, h Funktionen : $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Es sei $x_0 \in D$ und f, h stetig in x_0, mit $f(x_0) = h(x_0) = \ell$.

Dann ist g stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ $g(x_0) = \ell$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 :$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in U_\delta(x_0)$

[Übung: Benutzen Sie Satz 5.2.1 und den Einschnürungssatz, um diese Prop. zu beweisen]

Beweis: (Direkter Beweis)

* f stetig in x_0 $:\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, \delta' = \delta'(\varepsilon)$:

$\forall\, x \in D \;,\; x \in \mathcal{U}_{\delta'}(x_0)$

$\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

(1) $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

* h stetig in x_0 $:\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, \delta'' = \delta''(\varepsilon)$:

$\forall\, x \in D \;,\; x \in \mathcal{U}_{\delta''}(x_0)$

$\Rightarrow \quad |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

(2) $h(x_0) - \varepsilon < h(x) < h(x_0) + \varepsilon$

* $\forall\, x \in D \;,\; x \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0)$:

(3) $f(x) \le g(x) \le h(x)$

$\tilde{\delta} = \operatorname{Min}\{\delta, \delta', \delta''\} \Rightarrow \mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(x_0) \subseteq \mathcal{U}_{\delta}(x_0)$ *

$\mathcal{U}_{\delta'}(x_0)$ *

$\mathcal{U}_{\delta''}(x_0)$ *

$\rightsquigarrow \quad \tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon)$

$\forall\, x \in D, \quad x \in \mathcal{U}_{\tilde{\delta}}(x_0) = \{ y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| < \tilde{\delta} \}$

(1) $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

(2) $h(x_0) - \varepsilon < h(x) < h(x_0) + \varepsilon$

(3) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Warum muss $g(x_0) = l$ sein? Übung!

muss g stetig in x_0 sein

$$f(x_0) - \varepsilon < \underbrace{f(x) \leq g(x) \leq h(x)}_{(3)} < h(x_0) + \varepsilon$$

(1) (2)

$\rightsquigarrow$ Weil $f(x_0) = h(x_0) = l$

$\rightsquigarrow \quad l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq l + \varepsilon$

$\rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon)$, sodass

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

$\rightsquigarrow$ ($g(x_0)$ ist wohldefiniert) $\rightarrow$ Dann muss $l = g(x_0)$ sein

Sehr ähnlich zu:

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \leq & b_n & \leq & c_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ell & \Rightarrow & \ell & \Leftarrow & \ell \end{array}$$

Übung 5

Es seien f, g stetige Funktionen in x_0, wobei $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

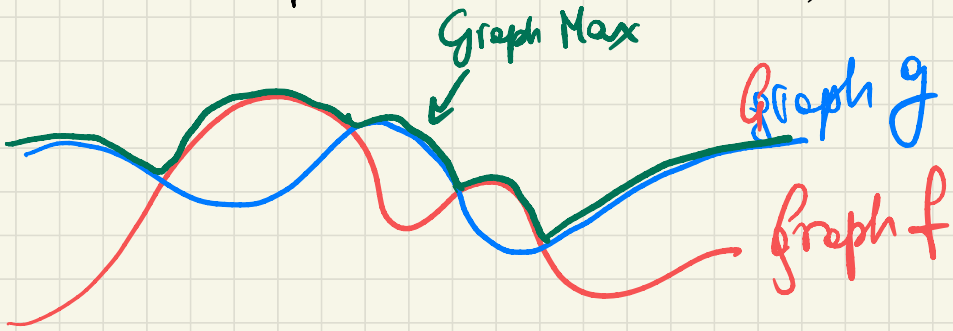
Beweisen Sie, dass die Funktion

$$\text{Max}\{f,g\} : D \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Max}\{f,g\}(x) := \text{Max}\{f(x), g(x)\}}$$

ist stetig in x_0.

(Ähnlich für $\text{Min}\{f,g\}$ ...)



(*) f stetig in $x_0 :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon)$:

$\forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$:

(*) $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

(*) g stetig in $x_0 :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta' = \delta'(\varepsilon)$:

$\forall x \in D \cap U_{\delta'}(x_0)$

(*) $g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) \leq \mathrm{Max}\{f,g\}(x)$

$g(x_0) - \varepsilon < g(x) \leq \mathrm{Max}\{f,g\}(x)$

$\forall x \in U_{\tilde{\delta}}(x_0)$

$\Downarrow$

$\tilde{\delta} = \mathrm{Min}\{\delta, \delta'\}$

$\mathrm{Max}\{f(x_0) - \varepsilon, g(x_0) - \varepsilon\} < \mathrm{Max}\{f,g\}(x)$ $\left(U_{\tilde{\delta}}(x_0) \subseteq U_\delta(x_0) \text{ und } \subseteq U_{\delta'}(x_0)\right)$

$\mathrm{Max}\{f(x_0), g(x_0)\} - \varepsilon$

Wir haben dann bewiesen, dass

$$\forall x \in U_{\tilde{\delta}}(x_0) \text{ ist}$$

$$\max\{f,g\}(x_0) - \varepsilon < \max\{f,g\}(x)$$

Ähnlich, kann es bewiesen werden, dass

$$\max\{f,g\}(x) < \max\{f,g\}(x_0) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon), \text{ sodass}$$

$$\max\{f,g\}(x_0) - \varepsilon < \max\{f,g\}(x) < \max\{f,g\}(x_0) + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Stetigkeit von $\max\{f,g\}$ in x_0

□