Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
24.6.2016

Topologie: Übungsblatt 10

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 30.6.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Nehmen Sie an, dass $\pi_1(S^n)$ trivial ist, für alle $n \geq 2$ (wobei S^n die n-dimensionale Sphäre ist.)
Benutzen Sie den Satz von van Kampen :

a) Sei M eine Mannigfaltigkeit von dimension $n \geq 3$, und $x_0, p \in M$ mit $p \neq x_0$. Zeigen Sie, dass $\pi_1(M; x_0) \cong \pi_1(M \setminus \{p\}; x_0)$.
b) Seien M und N zwei wegzusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit $n \geq 3$. Sei $x_0, x_1 \in M\#N$ mit $x_0 \in M \cap M\#N$ und $x_1 \in N \cap M\#N$ (die verbundene Summe, definiert in Übungsblatt 5). Zeigen Sie, dass $\pi_1(M\#N; x_0) \cong \pi_1(M; x_0) * \pi_1(N; x_1)$.

Aufgabe 2. (15 Punkte)

a) Sei $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ die Scheibe $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sei $z_i \in D^2$ für $1 \leq i \leq n$, und nehmen Sie an, dass $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $D^2 \setminus \{z_1, \dots z_n\}$.
b) Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ die Vereinigung von n Geraden durch den Ursprung. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3 \setminus X$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Es sei X ein wegzusammenhängender Raum, $x \in X$ und $\phi \colon \mathbb{Z} \to \pi_1(X, x)$ ein Isomorphismus. Es sei $A \subset X$ eine wegzusammenhängende Teilmenge mit $x \in A$, so dass

$$\mathrm{Im}(\pi(A, x) \to \pi(X, x)) = \phi(2\mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie, dass A kein Retrakt von X ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Zeigen Sie in folgenden Fällen, dass A kein Retrakt von X ist :

a) $X = \mathbb{R}^3$ und $A \subset X$ homöomorph zu S^1.

b) $X = S^1 \times D^2$ und $A = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in S^1 \times D^2 \mid x_2^2 + y_2^2 = 1\}$.

c) $X = D^2 \vee D^2$ und $A = \partial(D^2 \vee D^2)$