

Tutorium 4



Übung 1

Ist $P(\mathbb{N})$, die Potenzmenge der natürlichen Zahlen,

abzählbar? Nein

Beweis

$\mathbb{N}$

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$$

$\hookrightarrow$

0 1 2 3 4 5 ...

A : 1 0 1 1 0 0 0 ...

$A \subseteq \mathbb{N}$

A = {0, 2, 3}

$\emptyset$ 0 0 0 0 0 0 0 0

$\mathbb{N}$ 1 1 1 1 1 1 1 ...

$P(\mathbb{N}) \xleftrightarrow{\Phi} \text{Folgen}$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

$a_i \in \{0, 1\}$

$\Phi(A) : \begin{cases} a_i = 1 & \text{falls } i \in A \\ a_i = 0 & \text{" } i \notin A \end{cases}$

Es genügt zu beweisen, dass: $\mathcal{M}$
 Die Menge der Folgen mit Werten $\{0,1\}$
 ist nicht abzählbar.

Zweites Cantorsches Diagonalarargument

Widerspruchsbeweis: nehmen wir an, dass
 $\mathcal{M}$ abzählbar ist

$$\rightarrow \mathcal{M} = \{f_0, f_1, f_2, f_3, \dots\}$$

f_0	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	$\dots$	$a_{ij} \in \{0,1\}$
f_1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	
f_2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	

f_3

$$f \neq f_i \quad \forall i$$

$$\begin{matrix} p. & d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \in \mathbb{Z} & d_i \in \{0, \dots, 9\} \end{matrix}$$

$$f : b_0 b_1 b_2 b_3 \dots$$

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{ii} = 1 \\ 1 & \text{falls } a_{ii} = 0 \end{cases}$$

f_0 a_{00} a_{01} a_{02} a_{03} ... $a_{ij} \in \{0, 1\}$

f_1 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} ...

f_2 a_{20} a_{21} a_{22} a_{23} ...

f_3

$\vdots$ $p. a_1 a_2 a_3 \dots$
 $\in \mathbb{Z}$ $a_i \in \{0, \dots, 9\}$

$f : b_0 b_1 b_2 b_3 \dots$

$b_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{ii} = 1 \\ 1 & \text{falls } a_{ii} = 0 \end{cases}$

(f_0) 0 1 0 0 1 1 ...

f_1 1 1 0 0 1 1 ...

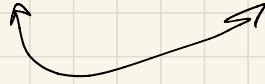
f_2 0 0 0 1 1 1 ...

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\downarrow$
 $f :$ 1 0 1 ...

$f \neq f_i, \forall i \in \mathbb{N}$ Widerspruch! $\square$

Beweis / Tatsache :

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$



Satz 2.4.5

Es sei X eine Menge. Dann ist $|X| < |\mathcal{P}(X)|$, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X ist.

Übung 2.4.2

Beweisen Sie Satz 2.4.5. Diese Übung ist schwer und kommt mit Hinweisen:

- (i) Falls X endlich ist, was ist $|\mathcal{P}(X)|$? Können Sie vielleicht Induktion benutzen, um zu beweisen, dass $|X| < |\mathcal{P}(X)|$?
- (ii) Nehmen wir an, dass X unendlich und nichtleer ist. Dann finden Sie eine injektive Abbildung von X nach $\mathcal{P}(X)$ um zu beweisen, dass $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ (siehe Definition 1.3.2).
- (iii) Sie müssen nun beweisen, dass $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. Durch Widerspruch: nehmen Sie an, dass es eine bijektive Abbildung $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ gibt. Es sei Y die Teilmenge $\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.
 - (a) Beweisen Sie, dass Y nichtleer ist (bemerken Sie, dass $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$...);
 - (b) Da f surjektiv ist, und $Y \in \mathcal{P}(X)$, es sollte $x_0 \in X$ geben, sodass $f(x_0) = Y$. Aber dann....?



$$|X| < |\mathcal{P}(X)|$$

$$\top |A| \leq |B| \iff \exists f: A \rightarrow B \text{ injektiv}$$

$$|X| < |\mathcal{P}(X)| :$$

- (a). $\exists f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ injektiv ($\Leftrightarrow |X| \leq |\mathcal{P}(X)|$)
- b. aber f kann nicht bijektiv sein ($\Rightarrow |X| \neq |\mathcal{P}(X)|$)
- (a) + (b) $\Rightarrow |X| < |\mathcal{P}(X)|$

Komplexe Zahlen

Wir haben gesehen, dass

$$\mathbb{R} \xrightarrow{j} \mathbb{C}$$
$$a \mapsto (a, 0)$$

j ist injektiv und

$$j(a) + j(b) = j(a+b)$$

$$j(a) \cdot j(b) = j(a \cdot b)$$

$$\leadsto \mathbb{R} \hookrightarrow j(\mathbb{R})$$

Können wir $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ sehen,
wobei die injektive Abbildung durch

$$l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a \mapsto (0, a)$$

$$l(a) + l(b) \stackrel{?}{=} l(a+b)$$

$$l(a) + l(b)$$

$$= (0, a) + (0, b)$$

$$= (0, a+b)$$



$$(0, a+b)$$

$$l(a \cdot b) =$$

$$= (0, a \cdot b)$$

$$l(a) \cdot l(b) =$$

$$= (0, a) \cdot (0, b) =$$

$$= (0 - a \cdot b, 0 \cdot b + a \cdot 0)$$

$$= (-a \cdot b, 0)$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ als Menge

$\hookrightarrow \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

$$f: X \rightarrow Y$$

$$\text{Graph}(f) \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{*} \text{Re}(f(z)) \\ & \textcircled{*} \text{Im}(f(z)) \end{aligned}$$

$$X, Y \quad \mathbb{C}$$

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{Graph}(f) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & \underbrace{x+iy}_{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \text{Re}(z) \\ y &= \text{Im}(z) \end{aligned}$$

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = \text{Re}(f(z)) + i \text{Im}(f(z))$$

Übung 2

Finden Sie den Realteil und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(a) \quad \frac{i}{1-i}$$

$$(b) \quad \frac{1}{i}$$

$$(c) \quad \frac{1+i}{2-3i}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ a, b \in \mathbb{R} : a+ib = \frac{i}{1-i} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a = \operatorname{Re}(a+ib) \\ b = \operatorname{Im}(a+ib) \end{array}$$

$$\frac{i}{1-i} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{i-1}{2} =$$

$$\underbrace{\frac{i}{1-i} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)}}_{\substack{\text{Z} \cdot \overline{\text{Z}} = |\text{Z}|^2 \in \mathbb{R}}}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\operatorname{Re}\left(\frac{i}{1-i}\right)} + i \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\operatorname{Im}\left(\frac{i}{1-i}\right)}$$

(b) und (c) Übung

Übung 3

Finden Sie alle mögliche Polarkoordinaten der Punkte:

(a) $1+i$

(b) $2-2i$

(c) $-1+i\sqrt{3}$

$$z = x + iy = (x, y) \quad (b), (c)$$

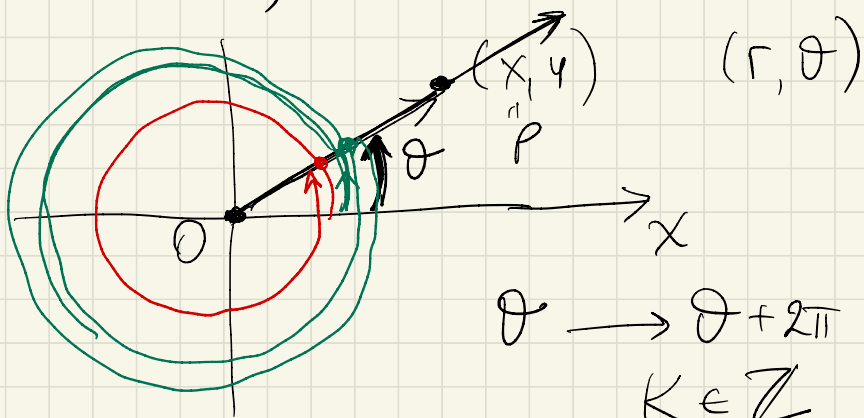
$$(\underline{x_1} + i\underline{y_1})(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

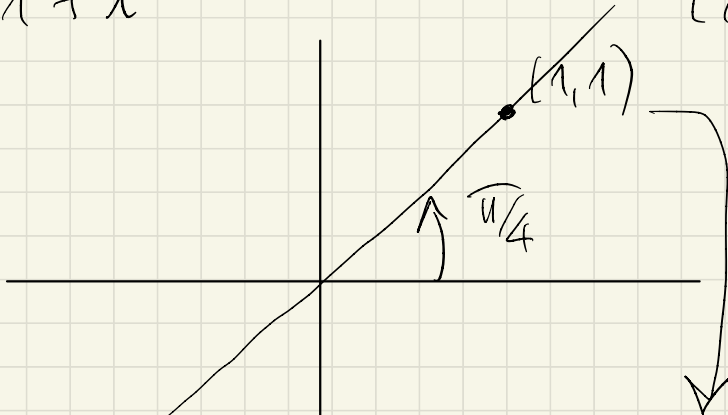
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

übung



(a) $1+i$

$(x, y) = (1, 1)$



$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$r : \begin{cases} x + iy \\ " \\ 1 + i = r (\cos \theta + i \sin \theta) \end{cases}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{x + iy}{r} = \cos \theta + i \sin \theta$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Übung 4

Berechnen Sie

a) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$

(d) $\left(\frac{1+i}{i-1}\right)^3$

$(1-i)^{12}$

b) $(1+i)^8$

~~(c) $(1-i)^{12}$~~

$(-i)^k$

$k=0, \dots, 12$

i^k

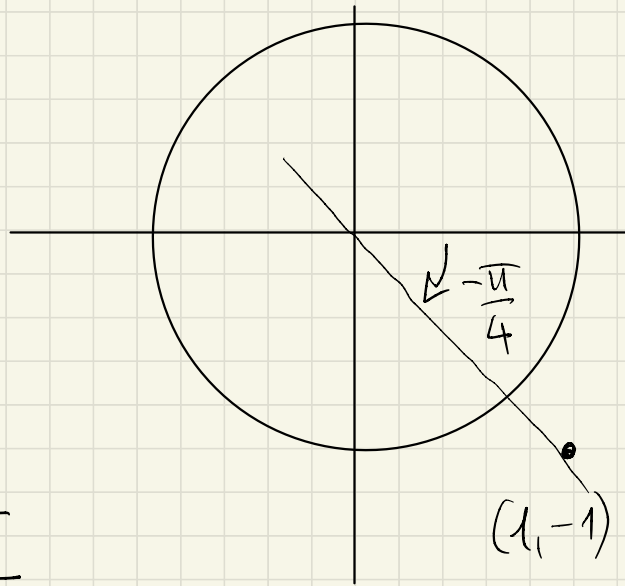
$z \neq 0$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

de Moivre:

$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

$$(1-i)^{12}$$



$$r = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k \right)$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$(1-i) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

de Moivre :

$$(1-i)^{12} = (\sqrt{2})^{12} \left(\cos \left(-\frac{12\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{12\pi}{4} \right) \right)$$

$$(1-i) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

de Moivre :

$$(1-i)^{12} = (\sqrt{2})^{12} \left(\cos \left(-\frac{12\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{12\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= \left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{12} \left(\cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi) \right)$$

$\parallel$
 2^6
 $\parallel$
 64

$$\begin{cases} \cos(-3\pi) = -1 \\ \sin(-3\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 64 \cdot (-1 + i \cdot 0) =$$

$$= \underline{\underline{-64}}$$

$$\Rightarrow (1-i)^{12} = 64(-1) = \underline{\underline{-64}}$$



Frage : $x^2 = a$, $a > 0$ $x \in \mathbb{R}$

Nullstellen: $x = \pm \sqrt{a}$

$z^2 = w_0$ wir haben eine Formel gegeben
(Prop. 3.2.2.)

Nullstellen z_0, z_1

Ist es wahr, dass $z_1 = -z_0$?

$$z_0^2 = (-z_0)^2$$

$$z^n = w_0$$

Übung 5 : Finden Sie alle Lösungen
der Gleichung

$$\underline{z^2 + \alpha z + \beta = 0} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$\text{Falls } z^2 + \alpha z + \beta = (z + \gamma)^2$$

$$\Rightarrow (z + \gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\gamma$$

Aber das ist nicht immer der Fall...

$$z^2 + \alpha z + \beta = (z + \gamma)^2 + \delta$$

$$(z + \gamma)^2 + \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \underbrace{(z + \gamma)^2}_{\downarrow w} = -\delta$$

$$w^2 = -\delta \quad \Rightarrow \quad z = w - \gamma \Rightarrow$$

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0$$

Wir möchten $z^2 + \alpha z + \beta$ als

$\underbrace{(z + \gamma)^2 + \delta}$ schreiben

$$z^2 + \alpha z$$

$$\downarrow$$

$$z^2 + \gamma^2 + \underbrace{2z\gamma}$$

$\downarrow$

$$2\gamma = \alpha \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2}$$

$$\hookrightarrow \underline{z^2 + \alpha z + \beta} =$$

$$= \underbrace{\left(z + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \beta}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{z^2 + \frac{\alpha^2}{4} + z\alpha}$$

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(z + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \beta}$$

... Übung

