Mathematisches Institut | Universität zu Köln
Prof. Dr. Sabatini | 17.01.2018
Assistent: Dr. Kegel

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 13

Abgabe : Bis spätestens Mittwoch 24.1.18 11 :55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind nicht möglich.

Hinweis : Dies ist das letzte Übungsblatt dieses Semesters. Die letzte Vorlesung findet am 24. Januar statt. An den letzten beiden Terminen (29. und 31. Januar) findet eine Vorbereitung auf die Klausuren statt, in der kein neuer Stoff eingeführt wird, sondern altes wiederholt wird.

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Sei S die Sphäre

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

a) Berechnen Sie den Krümmungstensor in der lokalen Parametrisierung $\varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\theta)\sin(\alpha) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Es ist erlaubt die Berechnungen der Christoffel-Symbole aus der Vorlesung zu benutzen.

b) Seien $v := \frac{\partial\varphi(\theta,\alpha)}{\partial\theta}$ und $w := \frac{\partial\varphi(\theta,\alpha)}{\partial\alpha}$. Kontrolieren Sie, dass

$$K(p) = I(R_p(v, w)w, v).$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Seien S eine reguläre Fläche, $p \in S$, und $v, w \in T_pS$ eine (nicht notwendig orthonormale) Basis der Tangentialebene T_pS. Zeigen Sie, dass

$$K(p) = \frac{I(R_p(v,w)w, v)}{I(v,v)I(w,w) - I(v,w)^2}.$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei R^l_{ijk} der Riemannsche Krümmungstensor in einer lokalen Parametrisierung einer regulären Fläche. Definieren Sie

$$R_{mijk} := \sum_{l=1}^{2} g_{ml} R^l_{ijk}.$$

Zeigen Sie, dass

$$R_{mijk} + R_{mjki} + R_{mkij} = 0.$$

Aufgabe 4. (15 Punkte)

Seien S eine reguläre Flache und $X, Y : S \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder auf S. Wir definieren den *Torsionstensor* T durch

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

a) Zeigen Sie, dass
$$T(X,Y) = -T(Y,X). \tag{1}$$

b) Zeigen Sie, dass
$$T(fX, gX) = fgT(X,Y) \tag{2}$$
für alle glatte Funktionen $f, g : S \to \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie, dass $T(X,Y) = 0$.

Es erscheint vielleicht seltsam T zu definieren, wenn es immer gleich Null ist. Aber es gibt einen algemeineren Begriff der kovarianten Ableitung, und für diesen allgemeineren Begriff verschwindet T nicht notwendigerweise. Troztem gelten die Formeln (1) und (2) auch für den allgemeineren Begriff der kovarianten Ableitung.