Prof. Silvia Sabatini
Dr. Alexander Caviedes Castro
Universität zu Köln
25.01.2021

ANALYSIS I
Übungsblatt 11

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 01.02.2021, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. Prüfen Sie nach, dass das Landau-Symbol "o" für $x \to 0$ die folgenden Eigenschaften erfüllt: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$

1. $\mathrm{o}(x^n) + \mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(x^n)$;
2. $\mathrm{o}(x^n) + \mathrm{o}(x^m) = \mathrm{o}(x^n)$ für alle $m > n$;
3. $a \cdot \mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(a \cdot x^n) = \mathrm{o}(x^n)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
4. $\mathrm{o}(x^n) - \mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(x^n)$;
5. $x^m \cdot \mathrm{o}(x^n) = \mathrm{o}(x^{n+m})$
6. $\mathrm{o}(x^n) \cdot \mathrm{o}(x^m) = \mathrm{o}(x^{n+m})$;
7. $\mathrm{o}(\mathrm{o}(x^n)) = \mathrm{o}(x^n)$;
8. $\mathrm{o}(x^n + \mathrm{o}(x^n)) = \mathrm{o}(x^n)$.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom.

(i) Zeigen Sie, dass
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
für $a \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Die *Vielfachheit* einer Nullstelle a von P ist definiert als der höchste Exponent k, für den sich P ohne Rest durch $(x-a)^k$ dividieren lässt.

Zeigen Sie, dass eine Nullstelle a von P genau dann Vielfachheit k hat, wenn
$$P(a) = 0,\ P'(a) = 0, \ldots,\ P^{(k-1)}(a) = 0,\ P^{(k)}(a) \neq 0$$
gilt.

Hausaufgabe 1. (6= 2 + 2 + 2 Punkte)

(a) Es seien $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\left(1+\frac{t\lambda}{n}\right)^n - t\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \leq 1-t$$

für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt. Schließen Sie daraus, dass

$$e^{t\lambda} - te^{\lambda} \leq 1-t$$

gilt.

(b) Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $t_1, t_2 \in [0,1]$ mit $t_1 + t_2 = 1$. Zeigen Sie, dass

$$e^{t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2} \leq t_1 e^{\lambda_1} + t_2 e^{\lambda_2}$$

gilt.

(c) Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ mit $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$e^{t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 + \ldots + t_n\lambda_n} \leq t_1 e^{\lambda_1} + t_2 e^{\lambda_2} + \ldots + t_n e^{\lambda_n}$$

gilt. Schließen Sie daraus, dass

$$\sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} \leq \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}$$

für $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Hausaufgabe 2. (5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema jeder der folgenden Funktionen:

(a) $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4 \quad$ für $x \in [0,2]$.

(b) $f_2(x) = 3x + \dfrac{1}{x} \quad$ für $x \in (0,3]$.

(c) $f_3(x) = x^{2/3}(x-5) \quad$ für $x \in [0,4]$.

(d) $f_4(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \quad$ für $x \in [-4,3]$.

(e) $f_5(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad$ für $x \in \mathbb{R}$ (mit $a \neq 0$) .

Hausaufgabe 3. (6 Punkte)
Zeigen Sie die folgende Version des Satzes von Rolle:
Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig;

(ii) f ist differenzierbar in (a, ∞);

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(a)$.

Dann gibt es ein $c \in (a, \infty)$, so dass $f'(c) = 0$ gilt.

Hausaufgabe 4. (8 = 4 + 4 Punkte)

- Beweisen Sie, dass die Ungleichung

$$\log(x) \leq x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Schließen Sie daraus, dass die Ungleichung

$$\log(x) \leq n(x^{1/n} - 1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- Es sei $p > 1$. Zeigen Sie, dass

$$x^p + y^p \leq (x + y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

für alle $x, y \geq 0$ gilt.

Extra Hausaufgabe 1. (6 = 3 + 3 Punkte)
Aufgabe 12 von Lesch01 und Aufgabe 9 von Reckziegel00