

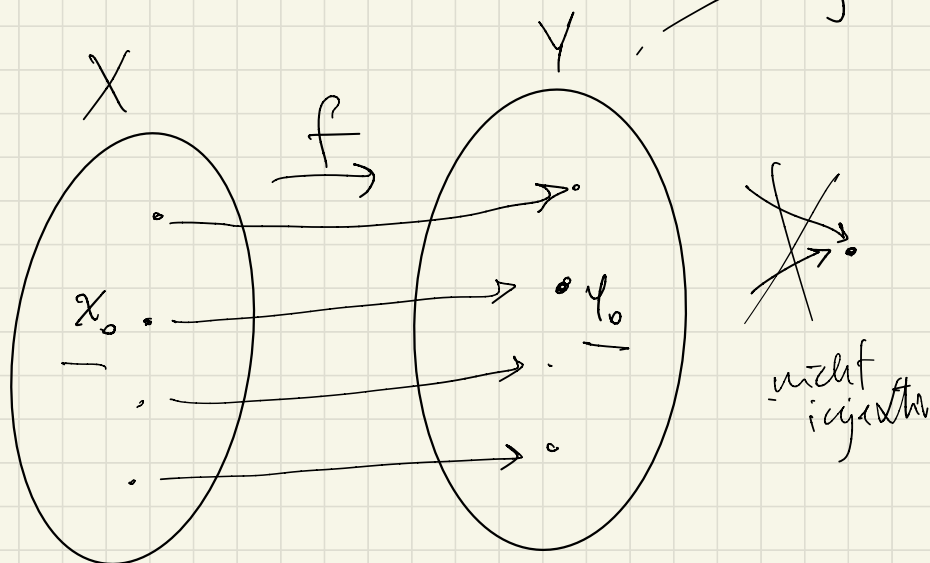
Vorlesung 2

- Verknüpfung zweier Funktionen
- 1.2.2 : Äquivalenzrelationen und Ordnungen

1.3 Die Natürlichen Zahlen
1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4



$f: X \rightarrow Y$ bijektiv $\leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv



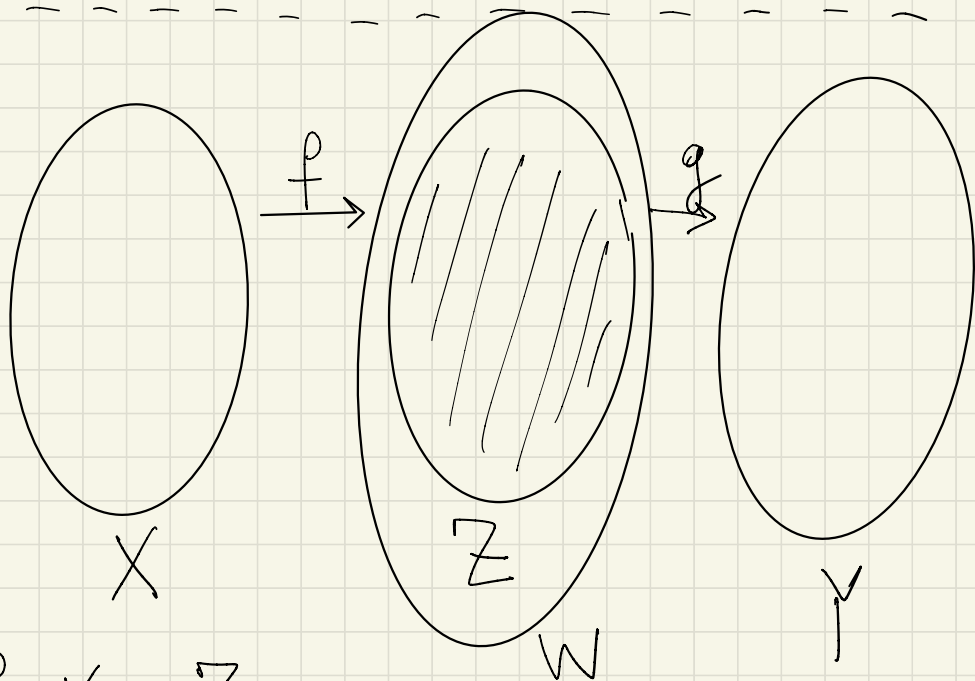
Def: Umkehrfunktion von f
(Inverse Funktion)

f surjektiv $\Rightarrow \forall y_0 \in Y, \exists x_0 \in X : f(x_0) = y_0$

Injektivität von $f \Rightarrow \exists! x_0 \in X$

$f^{-1}: Y \rightarrow X, \underline{f^{-1}(y_0) := x_0}$

Übung: f^{-1} ist auch bijektiv
1.2.3 $(f^{-1})^{-1}$?



$$f: X \rightarrow Z$$

Wir annehmen, dass

$$g: W \rightarrow Y$$

$$f(X) \subseteq W$$

$$g(\underline{f(x)})$$

Def: Die Verküpfung von f und g
ist Funktion

$$g \circ f : X \rightarrow Y$$

nach

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \sin x$$

$$(g \circ f)(x) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$$

$$\sin(x^2) \neq (\sin x)^2$$

————— ≥ 0

Übung 1.2.5, 1.2.6

$g \circ f$

$f: X \rightarrow Y$ bijektiv

$\Leftrightarrow g: Y \rightarrow X$

$$g \circ f = \text{Id}_X$$

$$f \circ g = \text{Id}_Y$$

$$\text{Id}_X = \underset{x \mapsto x}{\underset{X}{1}} : X \rightarrow X$$

Äquivalenzrelationen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$G := \{0, 2, 4, \dots\}$$

$$n \in G \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$$

$$U := \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$n \in U \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m + 1$$

G : gerade Zahlen, U : ungerade Zahlen

- " $G + G = G$ " (die Summe von 2 geraden Zahlen immer gerade ist)
 $2m + 2m' = 2(m+m')$

- " $G + U = U$ "
" $U + G = U$ "

$$2m + (2m' + 1) = 2(m+m') + 1$$

- " $U + U = G$ "

$$2m + 1 + (2m' + 1) = 2(m+m') + 2$$

Definition 1.2.7

Es sei X eine nichtleere Menge, und $\mathcal{R}$ eine Relation auf X . Dann ist $\mathcal{R}$ eine **Äquivalenzrelation** auf X , falls die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

- (i) für alle $x \in X$ gilt: $(x, x) \in \mathcal{R}$; (*Reflexivität*)
- (ii) für alle $x, y \in X$ gilt: $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \in \mathcal{R}$; (*Symmetrie*)
- (iii) für alle $x, y, z \in X$ gilt: $(x, y) \in \mathcal{R}$ und $(y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \in \mathcal{R}$; (*Transitivität*).

Die Teilmenge $[x] \subseteq X$ gegeben durch $[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$ wird **Äquivalenzklasse** von x genannt.

$$X = \mathbb{N}, \quad (x, y) \in \mathcal{R} \iff \begin{aligned} &x - y = 2n \quad \text{oder} \\ &y - x = 2n, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\rightarrow [0] = [2] = \dots = [2n] = G$$

$$\rightarrow [1] = [3] = \dots = [2n+1] = U$$

$$[0] + [0] = [0], \quad [0] + [1] = [1] + [0] = [1]$$

$$[1] + [1] = [0]$$

Definition 1.2.10

Gegeben eine nicht leere Menge X , ist eine **Ordnung** auf X eine Relation $\mathcal{O}$ auf X mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) für alle $x \in X$ gilt: $(x, x) \in \mathcal{O}$; (*Reflexivität*)
- (ii) für alle $x, y \in X$ gilt: $(x, y) \in \mathcal{O}$ und $(y, x) \in \mathcal{O} \iff x = y$; (*Antisymmetrie*)
- (iii) für alle $x, y, z \in X$ gilt: $(x, y) \in \mathcal{O}$ und $(y, z) \in \mathcal{O} \implies (x, z) \in \mathcal{O}$; (*Transitivität*).

Falls für alle $x, y \in X$, entweder $(x, y) \in \mathcal{O}$ oder $(y, x) \in \mathcal{O}$, dann sagen wir, dass es eine **totale Ordnung** ist.

Wir werden das Symbol $x \preceq y$ benutzen, um zu sagen, dass $(x, y) \in \mathcal{O}$. Wenn es nicht verwirrend ist, bezeichnen wir die Ordnung direkt mit $\preceq$.



$$A, \quad X = \mathcal{P}(A)$$

$$A \preceq B \iff A \subseteq B$$

nicht total
 $A = \{a, b\}$
 $\mathcal{P}(A) \ni \{a\}, \{b\}.$

Def: $X, \leq, S \subseteq X$

x ist eine obere Schranke von S , falls

$$x \geq s, \forall s \in S$$

• S nach oben beschränkt

$$X = \mathbb{N}, S = \{1, 3, 5\}$$

Obere Schranke: $5, 6, 7, 8, \dots$

• x untere Schranke von S

$$x \leq s \quad \forall s \in S$$

S nach unten beschränkt

$$\mathcal{P}(A), \leq = \subseteq$$

$$A \in \mathcal{P}(A), \forall B \in \mathcal{P}(A)$$

$$B \subseteq A$$

$\mathcal{P}(A)$ nach oben beschränkt
(und nach unten!)

Def $X, \preceq, S \subseteq X$

m ist ein Maximum (bzw. Minimum)

falls (bzw. untere)

* m ist eine obere Schranke von X

* $m \in S$

Lemma : Das Minimum (bzw. Maximum) einer Teilmenge — wenn es existiert! — ist eindeutig bestimmt!

Beweis : (Minimum)

Falls zwei Minima haben

m_1, m_2

(i) $m_1, m_2 \in S$

(ii) $m_i \preceq s \quad \forall s \in S, i=1,2$

m_1 Minimum $\stackrel{(ii)}{\Rightarrow} m_1 \preceq s \quad \forall s \in S$

$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} m_1 \preceq m_2$

m_2 Min $\stackrel{(ii)}{\Rightarrow} m_2 \preceq s \stackrel{(i)}{\Rightarrow} m_2 \preceq m_1$

Anfängersymmetrie
 $\preceq$
 $m_1 = m_2$

• Totale Ordnung $\forall x, y \in X$ ist
entweder
 $x \leq y, y \leq x$

• Def: $X, \leq$
Wohlordnung: $\forall S \subseteq X$
 S besitzt ein Minimum

Brnk: Falls $\leq$ Wohlordnung $\Rightarrow$
 $\leq$ ist total

Beweis: $S = \{x, y\}$

$\leq$ Wohlordnung $\Rightarrow S$ besitzt Min
 $x \leq y$ (falls x Min)
oder $y \leq x$ (" y ")

1.3 Natürliche Zahlen

$$\{ \cdot, +, \cdot \}$$

$$n: \{1, 2, 3, \dots, n\} \uparrow$$

$$\{ \cdot, +, \cdot \}$$

$$\{1, 2\}$$

Def.: A, B Mengen

A und B sind gleichmächtig, falls

- $A = B = \emptyset$
- $\exists f: A \rightarrow B$ bijektiv $A \sim B$

Satz: $A \sim A$

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$f: A \rightarrow B \Rightarrow f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

Def. Die Mächtigkeit (oder Kardinalität)

- einer Menge A ist die Familie von Mengen B : $A \sim B$

$|A|$

$|A|$

- Falls es eine injektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt $\Rightarrow$
 $|A| \leq |B|$

Def. (Natürliche Zahlen)

$$0 := |\emptyset|$$

$$A \cup A = A$$

- Nachfolgende Menge

$$A \rightsquigarrow A^+ = A \cup \underbrace{\{A\}}$$

Menge, deren
einziges Element
die Menge A ist

$$A = \{a, b, c\}$$

$$A^+ = \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$$

$$0 := |\emptyset|, \quad 1 := |\emptyset^+|, \quad 2 := |\{\emptyset\}^+| = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|$$

	$\emptyset$	$\emptyset^+ = \{\emptyset\}$	$\left \begin{array}{l} 3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^+ \\ \dots \end{array} \right.$
nehme die Mächtigkeit $\rightsquigarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	0	1	

Wir berechnen ein beliebiges n. Zahl mit
n. Die Menge der nat. Zahlen

$$\mathbb{N} \quad \mathbb{N}$$

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow n^+ \text{ (die nachfolgende Zahl)}$$

$$\underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}}_A \quad | \quad n^+ := |A^+|$$

A ist endlich, falls $\exists n \in \mathbb{N}$:

$$|A| = n$$

Ansonsten ist A unendlich

$$n \leq m \iff$$

• $n = m$, oder

• $n < m$

$\downarrow$ $\swarrow$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$$

$$0 < 1$$

$$\updownarrow \quad \downarrow$$

$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

$$0 < 2$$

$$\updownarrow \quad \downarrow$$

$$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$1 < 3$$

$$\downarrow \quad \searrow$$

$$\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Übung : $(1.3.3) \leq$ Wohlordnung
(und deshalb, $\leq$ Totalordnung)

1.3.3. Operationen auf $\mathbb{N}$

- Addition : $m+n$?
 $A, B : |A|=m, |B|=n$

$$m+n := |A \cup B|$$

(Übung : $n^+ = n+1$)

- Multiplikation : $A, B : |A|=m, |B|=n$

$$m \cdot n = |A \times B|$$

- Differenz : Falls $A \subseteq B$

$$n-m := |B \setminus A|$$

$$m \leq n$$

$$A \subseteq B, |A|=m, |B|=n \implies m \leq n$$

- Kommutativität der $+$ und $\cdot$
- Assoziativität " "
- Distributivität der $\cdot$ über der $+$

$$\underline{m \cdot (n+p) = (m \cdot n) + (m \cdot p)}$$

$$A, |A|=m$$

$$B, |B|=n$$

$$C, |C|=p$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$\underline{A \times (B \cup C) \iff (A \times B) \cup (A \times C)}$$

1.3.4 Peanos Axiome und Induktionsprinzip

Definition 1.3.3

Es sei $\mathbf{N}$ eine nicht leere Menge, $0_{\mathbf{N}}$ ein Symbol und $N: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ eine Funktion. Das Tripel $(\mathbf{N}, 0_{\mathbf{N}}, N)$ ist ein *Modell natürlicher Zahlen*, wenn es die folgenden Axiome verifiziert:

- (P1) $0_{\mathbf{N}} \in \mathbf{N}$;
- (P2) Für jedes Element $n \in \mathbf{N}$, es ein eindeutiges Element $N(n)$ existiert, das noch in $\mathbf{N}$ liegt (Existenz der "Nachfolgendenabbildung" $N: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$);
- (P3) Es gibt kein $n \in \mathbf{N}$, so dass $N(n) = 0_{\mathbf{N}}$ (die Nachfolgendeabbildung ist nicht surjektiv, da $0_{\mathbf{N}} \notin N(\mathbf{N})$, und $0_{\mathbf{N}}$ ist keine Nachfolgende Zahl);
- (P4) Falls $N(n) = N(m)$, dann $n = m$, für alle $n, m \in \mathbf{N}$ (die Nachfolgendeabbildung ist injektiv);
- (P5) Es sei A eine Teilmenge von $\mathbf{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:
 - (i) $0 \in A$, und
 - (ii) Für alle $n \in \mathbf{N}$, $n \in A \implies N(n) \in A$.Dann ist $A = \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\geq 0} & \quad \frac{p}{q} \cdot p, q \in \mathbb{N} \quad \text{mit } q \neq 0 \quad \text{und} \quad \textcircled{\mathbb{N}} \\ 0 \in \mathbb{Q} & \\ \forall x \in \mathbb{Q} & \rightarrow N(x) := x+1 \\ x = 0,5 & \rightarrow N(x) = 1,5 \\ \mathbb{N} = \mathbb{Q}_{\geq 0} & \quad A = \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

Prop. : $(\mathbb{N}, 0, N)$ ist ein Modell
 $\downarrow$
 $|\emptyset|$ der natürlichen Zahlen

Beweis : (P1) $0 \in \mathbb{N}$ ✓

(P2) $N: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} n & \mapsto & n^+ = |A^+| \\ | & & \parallel \\ |A| & & N(n) \end{array}$$

(P3) $0 \notin N(\mathbb{N})$ per definitionen

(P4) (Übung) : $\bullet N$ injektiv

$\bullet N: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$
 surjektiv

(P5) $A : 0 \in A$

$\bullet n \in A \Rightarrow N(n) \in A$

Zu Beweisen: $A = \mathbb{N}$

Widerspruchsbeweis $A^C \neq \emptyset$
 $\hookrightarrow \mathbb{N} \setminus A$

$A^C \subseteq \mathbb{N}$, $\leq$ Wohlordnung ist $\Rightarrow \exists m \in A^C$
 m Minimum ist

A^C m Minimum

• $m \neq 0$, weil $0 \in A$ aber $m \in A^C$

• (Weil $N: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ surjektiv)

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : N(n) = m$$

$$* n \in A \leadsto N(n) \in A, N(n) = m \in A^C$$

$$* n \notin A \leftrightarrow \underline{n \in A^C} \quad \text{Widerspruch}$$

$$N(n) = m \Rightarrow \underline{n < m}$$

$\hookrightarrow$ Widerspruch

$(\mathbb{N}, 0, N)$

