Prof. Silvia Sabatini
Dr. Alexander Caviedes Castro

Universität zu Köln
30.11.2020

ANALYSIS I
Übungsblatt 5

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 07.12.2020, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. Drücken Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten (d. h. $x + iy$) aus:

1. $(1 + i)^{20}$
2. $(1 - i)^{11}$
3. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Präsenzaufgabe 2. Stellen Sie die Lösungen der Gleichung $z^6 = -1$ in der komplexen Ebenen dar.

Präsenzaufgabe 3.
1. Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ auf $\mathbb{C}$ wird wie folgt definiert. Seien $z = a + ib$ und $w = c + id$ komplexe Zahlen, dann setzt man $z <_{\text{lex}} w$, wenn:
$$a < c \text{ oder } (a = c \text{ und } b < d)\,.$$
Zeigen Sie, dass die lexikographische Ordnung mit der algebraischen Struktur des Körpers der komplexen Zahlen nicht verträglich ist.
2. Zeigen Sie, dass es keine totale Ordnung gibt, die mit der algebraischen Struktur des Körpers der komplexen Zahlen verträglich ist.

Hausaufgabe 1. (10=3+3+4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung einer Geraden in der komplexen Ebenen in der folgenden Form
$$az + \bar{a}\bar{z} + c = 0 \text{ mit } a \in \mathbb{C} \text{ und } c \in \mathbb{R}$$
geschrieben werden kann.
2. Zeigen Sie, dass die Gleichung eines Kreises in der komplexen Ebenen in der folgenden Form
$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \text{ mit } a, b \in \mathbb{C} \text{ und } c \in \mathbb{R}$$
geschrieben werden kann.

3. Untersuchen Sie die Auswirkung der Transformation $z \to 1/z$, die die komplexe Ebene ohne den Ursprung auf sich selbst abbildet. Beweisen Sie, dass das Bild einer Geraden unter dieser Transformation eine Gerade oder ein Kreis ist und dass das Bild eines Kreises unter dieser Transformation eine Gerade oder ein Kreis ist.

Hausaufgabe 2. (9 = 3 + 3 + 3 Punkte)

1. Beweisen Sie das folgende Lemma (Lemma 4.1.5. auf den Notizen):

   Es sei (a_n) eine reelle Folge, die nach $l > 0$ konvergiert. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$, gilt $a_n > 0$.

2. Beweisen Sie, dass falls $a_n \to +\infty$, oder $a_n \to -\infty$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und dass die Folge $\frac{1}{a_n}$, die definiert für alle $n \geq N$ ist, eine Nullfolge ist, d.h. $\frac{1}{a_n} \to 0$.

3. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$, für ein $N \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass falls $a_n \to +\infty$, dann $b_n \to +\infty$, und falls $b_n \to -\infty$, dann $a_n \to -\infty$.

Hausaufgabe 3. (6 = 3 + 3 Punkte)
Zeigen Sie direkt mittels der Definition des Grenzwertes:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n-1} = +\infty$

Extra Hausaufgabe 1.
Zunächst ein bisschen Theorie:
Die Lösung kubischer Gleichungen (Scipione dal Ferro (1515), Girolamo Cardano (1545)). Jede Gleichung dritten Grades

$$y^3 + by^2 + cy + d = 0$$

kann als

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

geschrieben werden, indem man y durch $x - b/3$ ersetzt. Wir suchen nach u und v, so dass eine Lösung der Gleichung 1 die Form $u + v$ hat. Unter der Annahme dass $u + v$ eine Lösung der Gleichung 1 ist, können wir zeigen, dass u und v die Gleichungen

$$uv = -\frac{p}{3} \text{ und } u^3 + v^3 = -q$$

erfüllen. Wenn wir die erste Gleichung kubieren, finden wir heraus, dass u^3 und v^3 Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + qz - p^3/27 = 0$$

sind. Mit anderen Worten:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ und } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,.$$

Wir schließen daraus, dass

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,. \tag{2}$$

Die Gleichung 2 stellt neun Zahlen dar, weil jede Kubikwurzel drei Werte hat. Aber diejenigen, die Gleichung 1 lösen, sind nur drei, weil $uv = -p/3$ gelten muss. Wenn $u_k\,(k = 1, 2, 3)$ die Werte der ersten Kubikwurzel sind, sind die Lösungen der Gleichung 1

$$x_k = u_k - \frac{p}{3u_k}\ (k = 1, 2, 3)\,.$$

- (10 = 5 + 5 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen:
  1. $x^3 - 3x - 4 = 0$
  2. $x^3 - 9x + 10 = 0$