

Tutorium

06.11.20



Übung 1 (Logik)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

(1) Genau eine Aussage auf dieser Liste ist falsch

(2) " zwei Aussagen " " " sind "

(3) " drei " " " " " "

⋮
⋮
⋮

(99) " 99 " " " " " "

(100) " 100 " " " " " "

Behauptung: Es gibt höchstens eine Aussage, die wahr ist

(99) ! $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \\ (n): \text{Genau } n \text{ Aussagen auf} \\ \text{dieser Liste falsch sind} \\ \forall 1 \leq m \leq n \quad (n-1) \end{array} \right.$

Übung 2

(Übung 1.1.5. (g))

$$(1) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(de-morgansche
Gesetze)

$$(2) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(1) (A \cap B)^c = \{x \mid \neg (x \in A \wedge x \in B)\}$$

↑
Verneinung

$$A^c \cup B^c = \{x \mid (\neg x \in A) \vee (\neg x \in B)\}$$

(P, Q) Aussagen . Wahrheitstabelle

$$\neg (P \wedge Q) \longleftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$$

(Übung
1.1.2. (f))

"Repetitor juwanf!"

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	F	W	W	F	W
F	F	F	W	W	W	W

oder

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \Leftrightarrow (A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C \quad (1)$$

und

$$(A \cap B)^C \supseteq A^C \cup B^C \quad (2)$$

Beweis: $X \subseteq Y \Leftrightarrow X^C \supseteq Y^C$

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (A \cap B)^C \supseteq A^C \\ (A \cap B)^C \supseteq B^C \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A \cap B)^C \supseteq A^C \cup B^C \quad (2) \checkmark$$

$$(1) (A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$$

$$\underline{x} \in (A \cap B)^C$$

$$A, B \subseteq \mathcal{U}$$

$$x \in \mathcal{U} = A \cup A^C$$

$$A^C = \mathcal{U} \setminus A$$

und $x \in A$ oder

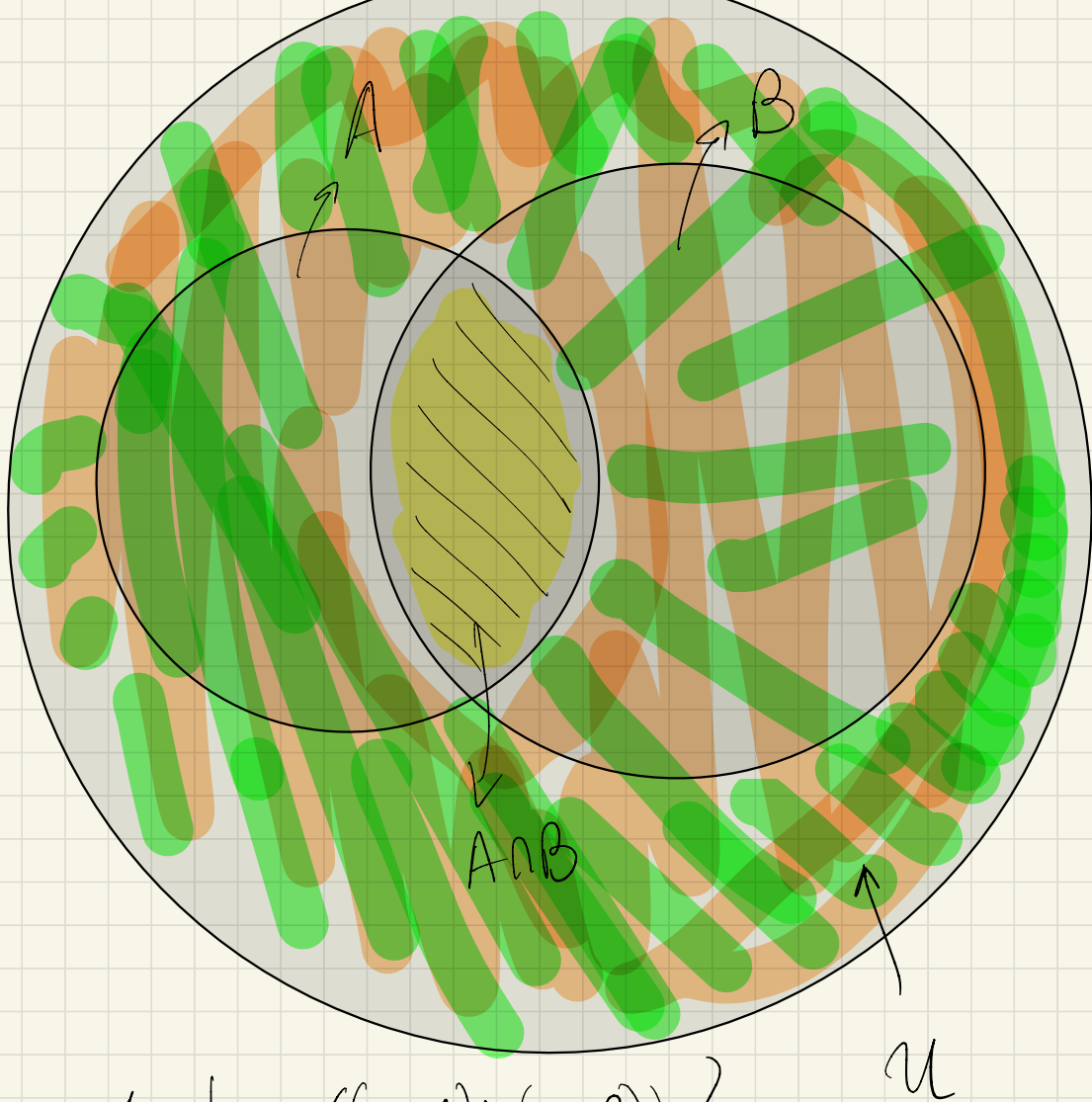
$$B^C = \mathcal{U} \setminus B$$

$$x \in A^C$$

- $x \in A$ und $x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \in B^C$
- $x \in A^C$ und $x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \in A^C$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \in B^C \cup A^C$$

$$(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$$



$$\{x \mid \neg (x \in A \wedge x \in B)\}$$

$$\uparrow$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$A^c \cup B^c$$

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Übung 3

Es seien $M = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

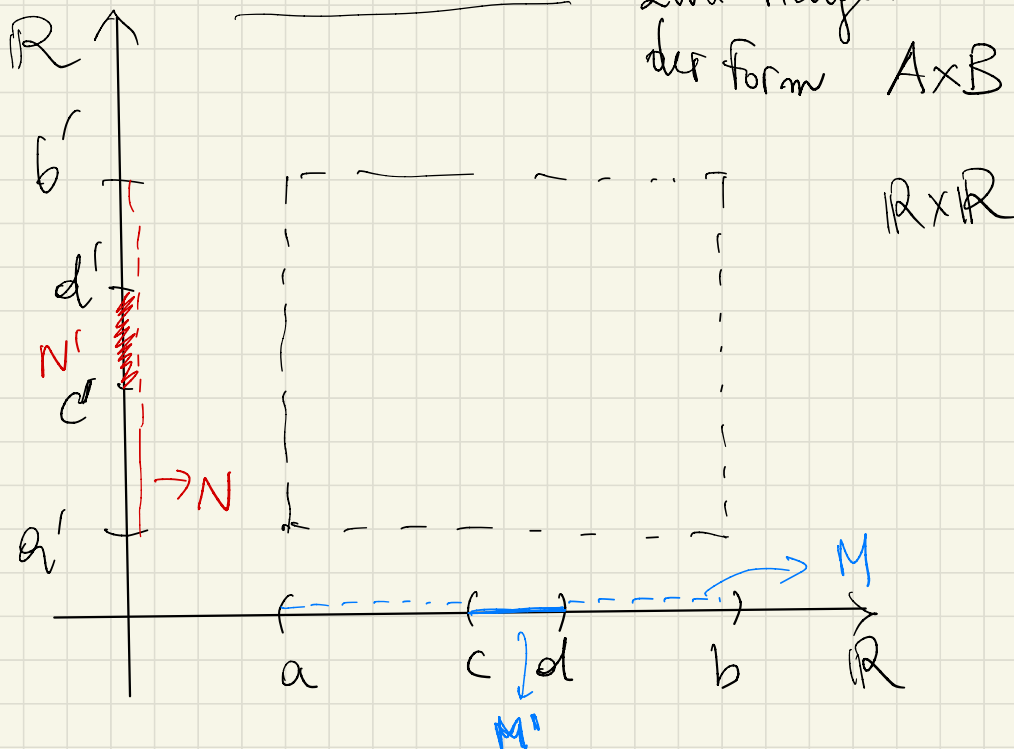
$$M' = (c, d) \quad a < c < d < b$$

$$N = (a', b'), \quad N' = (c', d')$$

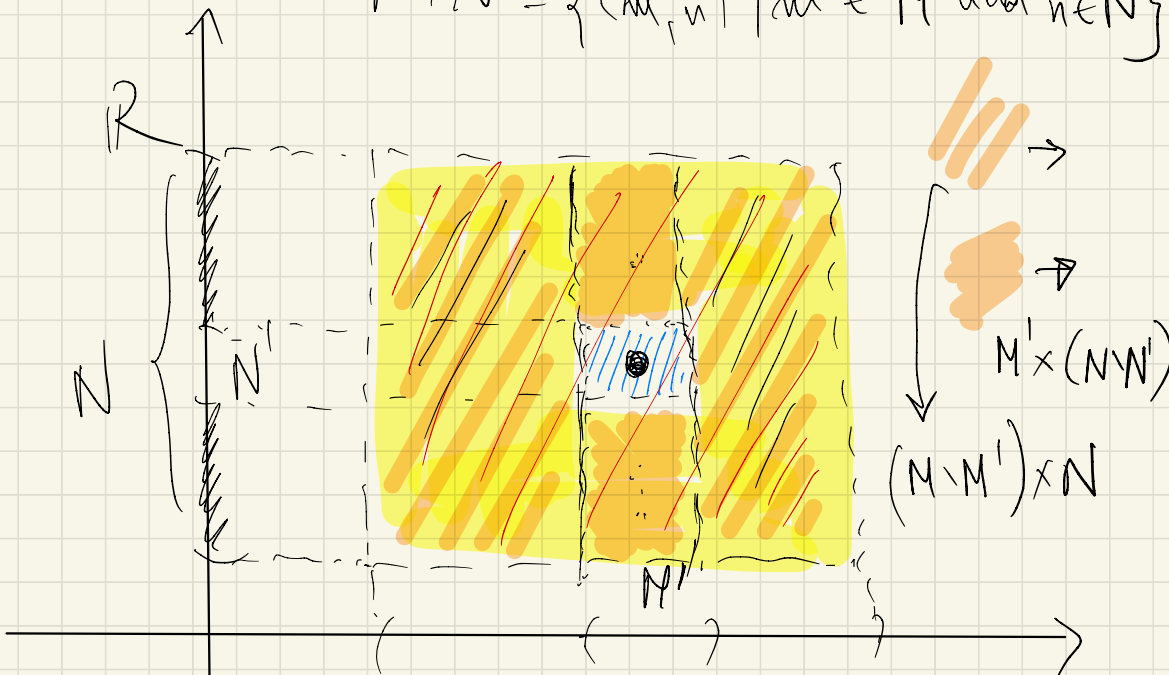
$$N' \subsetneq N$$

• Ist $(M \times N) \setminus (M' \times N') \stackrel{?}{=} (M \setminus M') \times (N \setminus N')$

• Schreiben $(M \times N) \setminus (M' \times N')$ als Vereinigung von zwei Mengen der Form $A \times B$



$$M \times N = \{ (m, n) \mid m \in M \text{ und } n \in N \}$$



$$(A \times B) \cup (A' \times B')$$

$$(M \times N) \setminus (M' \times N')$$

$$(M \setminus M') \times (N \setminus N')$$



Übung 4 (Übung 1.2.5)

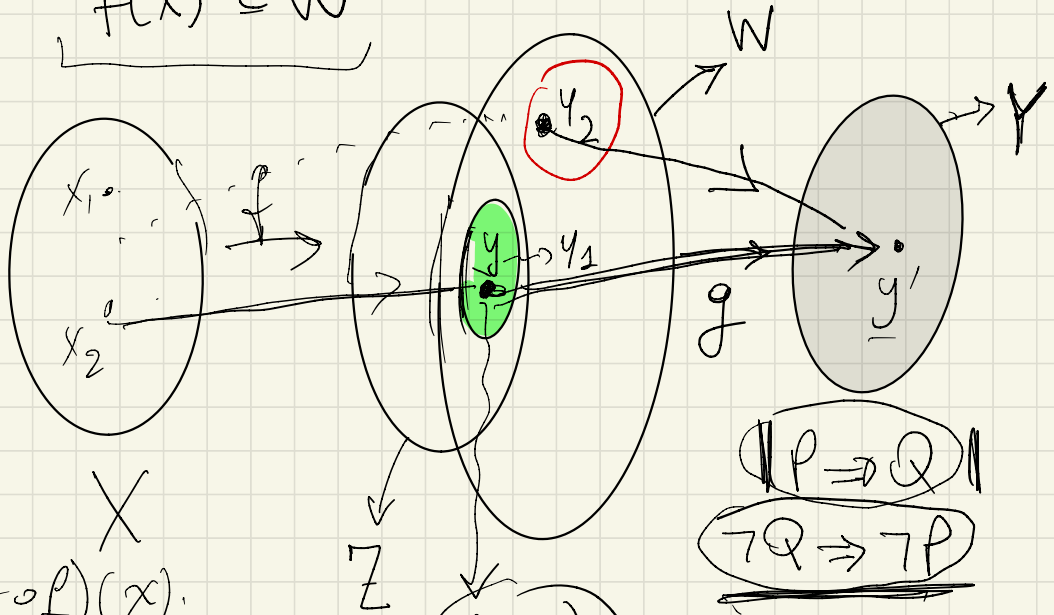
$$Z \cap W \supseteq f(X)$$

$$f: X \rightarrow Z, g: W \rightarrow Y$$

$$f(X) \subseteq Z$$

"die verknüpft werden können" bedeutet, dass

$$f(X) \subseteq W$$



$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(a) Welche Bedingungen sind notwendig,

damit $g \circ f$ injektiv ist?

$$(g \circ f) \text{ injektiv} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ injektiv} \\ g \dots \dots f(X) \end{array} \right]$$

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$g \circ f \text{ injektiv} \Rightarrow f \text{ injektiv}$$

$$\neg (P \Rightarrow Q) \text{ ist } \underline{P} \wedge \underline{\neg Q} \checkmark$$

$$g \circ f \text{ injektiv} \Leftrightarrow g \text{ injektiv}$$

nicht gilt

$$\underline{g \circ f \text{ injektiv} \wedge g \text{ nicht injektiv}}$$

$$\underline{g \circ f \text{ injektiv}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g : f(X) \rightarrow Y \\ f(X) \\ \text{injektiv} \end{array} \right]$$

1.2.5 (a'')

$g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$

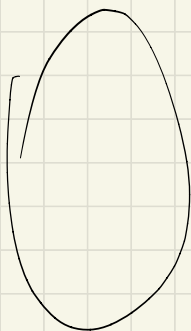
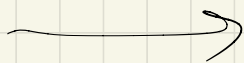
Bedingung
auf
 f und g

$g \circ f$ injektiv $\Leftarrow$

$\Rightarrow$

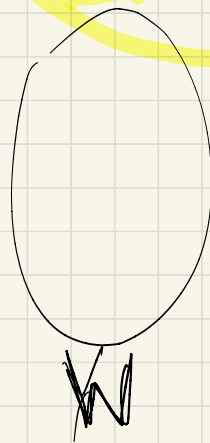
f injektiv

$$\Downarrow \\ n \leq m$$



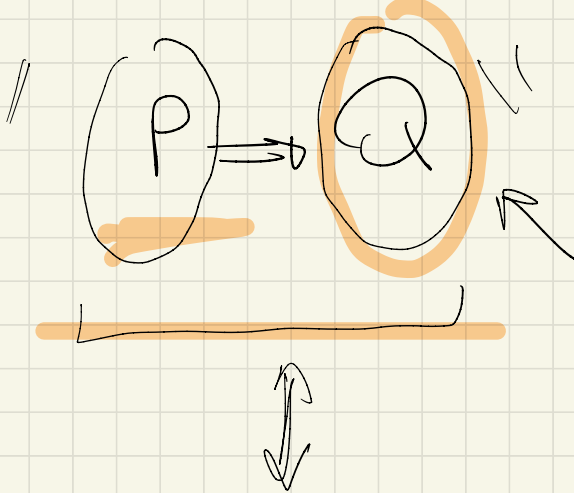
X

$$|X| \leq |W|$$



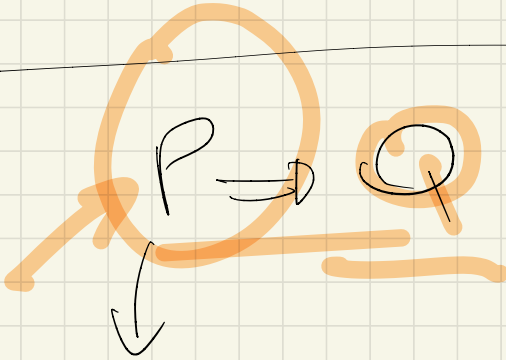
W

Falls $\exists n, m$ gdf
 $|X| = n, |W| = m$

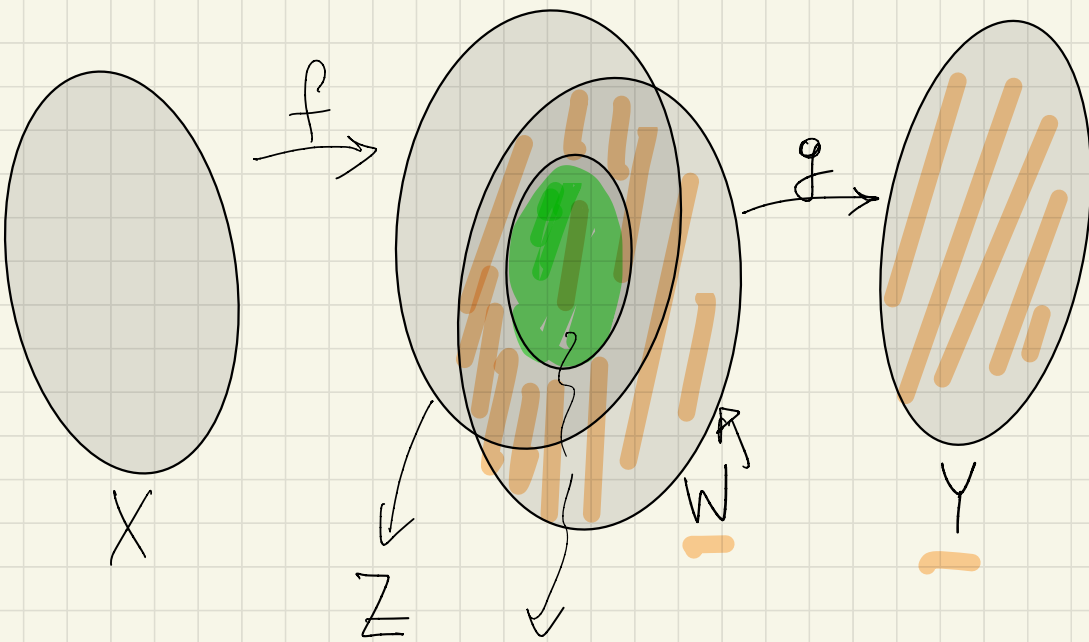


Notwendige
Bedingung für
 P

$$\ll \neg P \Leftarrow \neg Q \gg$$



P eine hinreichende Bedingung
für Q



Falls $(g \circ f)$ injektiv

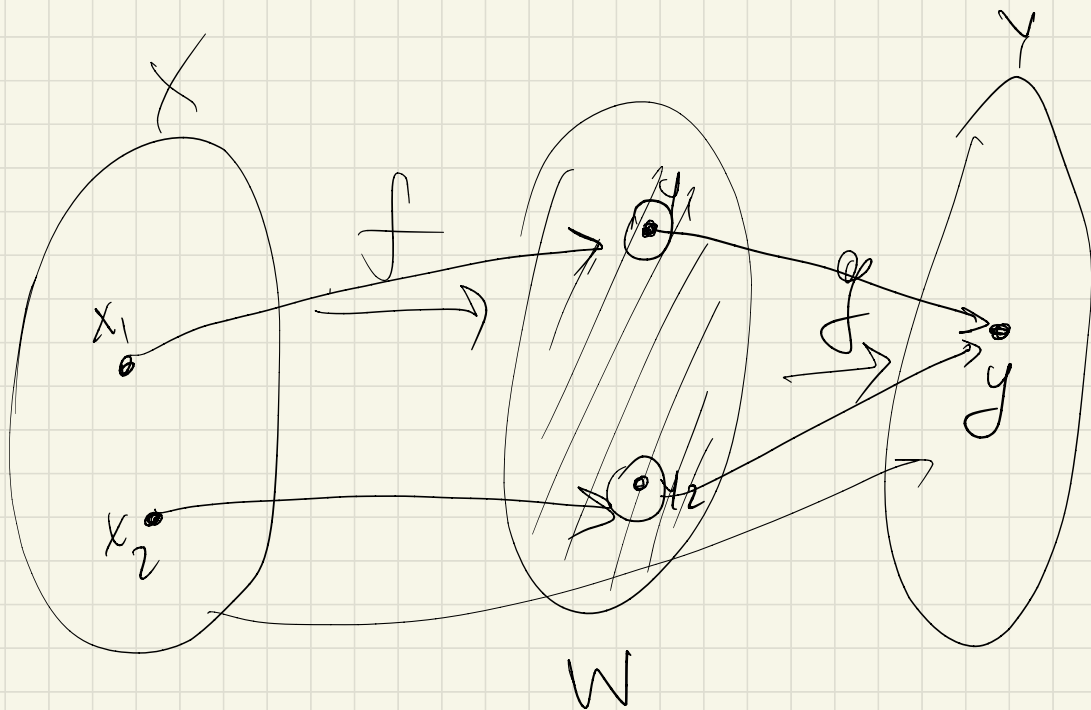
* Ist es notwendig, dass f injektiv ist?

* " " " " g " "

* $(g \circ f)$ injektiv und f surjektiv $\Rightarrow$
 $f(X) = W \leftarrow g$ injektiv

• Welche Bedingungen sind hinreichend,
 damit $(g \circ f)$ injektiv ist?

$(g \circ f)$ injektiv und $f(X) = W$ (= Definitionsmenge von g)
 $\Rightarrow g$ injektiv,



$$\underline{f(x) = w}$$

Übung 1.2.6

(a) Beweisen Sie, dass $f: X \rightarrow Y$ bijektiv ist $\Leftrightarrow$

$$\left[\exists g: Y \rightarrow X \text{ gibt, mit } \underbrace{g \circ f = \text{id}_X}_{\text{und}} \text{ und } \underbrace{f \circ g = \text{id}_Y} \right]$$

(b) Beweisen Sie, dass g genau die Inversefunktion f^{-1} ist

(a)

$\Rightarrow$ einfach

$\Leftarrow$

$$g: Y \rightarrow X$$

$$\underbrace{g \circ f = \text{id}_X}_{\text{und}} \text{ und } \underbrace{f \circ g = \text{id}_Y}$$

Zu beweisen: f injektiv & f surjektiv

$$\swarrow \text{id}_X \text{ injektiv} \Rightarrow f \text{ injektiv}$$

Per definitionen der Umkehrabbildung

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{bijektiv}$$

$$f^{-1}: Y \rightarrow X \quad \text{definiert}$$

Zeigen Sie, dass

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

$$f^{-1} =: g_1$$

$$g_1 \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g_1 = \text{id}_Y$$

$$g_2: \quad g_2 \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g_2 = \text{id}_Y$$

g

$$\text{Zu zeigen: } g_1 = g_2 \quad (f^{-1} = g)$$

$$g_1 \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g_1 = \text{id}_Y$$

$$\underbrace{\hspace{10em}} \quad \text{und}$$

$$g_2 \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g_2 = \text{id}_Y$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

Dann $\underbrace{g_1 = g_2}_{\hspace{10em}}$

$$g_1 : Y \rightarrow X, \quad g_2 : Y \rightarrow X$$

$$g_1 = g_1 \circ \text{id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) =$$

$$= (g_1 \circ f) \circ g_2 = \text{id}_X \circ g_2 = g_2$$

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$$

Äquivalenzrelation auf X

X nicht leer $R \subseteq X \times X$

$\sim$
 R ist eine Äquivalenzrelation $\Leftrightarrow$

- (i) $x \sim x, \forall x \in X$ (Reflexivität)
- (ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x, \forall x, y$ (Symmetrie)
- (iii) $x \sim y$, und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$
 $\forall x, y, z \in X$
(Transitivität)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$G = \{0, 2, 4, \dots\} \quad U = \{1, 3, 5, \dots\}$$

+

$$G + G = G$$

$$U + U = G$$

$$G + U = U$$

$$U + G = G$$

$\sim$

$$x \sim y$$

$$G = \{0, 2, 4, \dots\}$$

$$U = \{1, 3, 5, \dots\}$$

Frage: Gibt es eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$, sodass

$$x \sim y : \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \text{ und } y \text{ gerade sind} \\ \text{oder} \\ x \text{ und } y \text{ ungerade sind} \end{array} ?$$

$$x \sim y : \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2k, \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ \text{oder} \\ y - x = 2k, \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$x \sim x \quad \checkmark$$

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad ?$$

$$\left| \begin{array}{l} x - y = \pm 2k, k \in \mathbb{N} \\ y - z = \pm 2j, j \in \mathbb{N} \end{array} \right| \Rightarrow x - z = \pm 2h, h \in \mathbb{N}$$

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

$$G = [0] = [2] = [4] \dots$$

$$U = [1] = [3] = [5] = \dots$$

Im Allgemeinen:

$$x \sim y \iff [x] = [y]$$

(Transitivität + Symmetrie)