ÜBUNGEN ZU LINEARE ALGEBRA I

Prof. Dr. Silvia Sabatini
Dr. Thomas Rot

WINTERSEMESTER 2016/17 - Universität zu Köln

31. Januar 2017

KAPITEL 1

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Aufgabe 1.1 (0 Punkte)**.** Bringen Sie die Gleichungssysteme

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 9x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.$, **b)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 5x_2 & & & = & 14 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & = & 1 \end{array}\right.$,

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}\right.$, **d)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}\right.$.

in Zeilenstufenform. Welche der Systeme a)-d) haben Lösungen? Berechen Sie die Menge der Lösungen.

Aufgabe 1.2 (0 Punkte)**.** Sei $t \in \mathbb{R}$ und betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 6x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & (2-t)x_2 & = & 6 \end{array}\right. .$$

Berechnen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ wofür das System Lösungen hat, und geben Sie die Lösungen an.

Aufgabe 1.3 (0 Punkte)**.** Sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \qquad\qquad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Menge der Lösungen Σ. Zeigen Sie, dass für alle $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, x_n) \in \Sigma_0$ und $s, t \in \mathbb{R}$ gilt, dass $sx + ty \in \Sigma$.

Aufgabe 1.4 (0 Punkte)**.** Sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit Menge der Lösungen Σ. Nehmen Sie an, dass $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$ für jede $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Gilt dass $\Sigma \subset \mathbb{Z}^n$? Zeigen Sie dass, oder geben Sie eine Gegenbeispiel von $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij}, b_j \in \mathbb{Z}$ sodass $\Sigma \not\subset \mathbb{Z}^n$.

Aufgabe 1.5 (20 Punkte)**.** Welche der Gleichungssysteme

a) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 11x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

haben Lösungen? Benutzen Sie den Gauß-Jordan-Algorithmus um die Menge der Lösungen zu berechnen.

Aufgabe 1.6 (10 Punkte)**.** Sei

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

ein Gleichungsystem.

a) Betrachten Sie $z = t \in \mathbb{R}$ als Parameter und benutzen Sie den Gauß-Jordan-Algorthmus um das System zu lösen.

b) Betrachten Sie $x = s \in \mathbb{R}$ als Parameter und benutzen Sie den Gauß-Jordan-Algorithmus um das System zu lösen.

c) Zeigen Sie das die Menge der Lösungen in a) und b) dieselbe sind.

Aufmerkung: der Gauß-Jordan-Algorithmus gibt keine eindeutige Zeilenstufenform. Diese aufgabe macht das explizit.

Aufgabe 1.7 (10 Punkte)**.** Beantworten Sie die Fragen in “Fragen und Vertiefung 1.3.2” auf Seite 10 der Notitzen des Kurses.

KAPITEL 2

MATRIZEN

Aufgabe 2.1 (10 Punkte)**.** Seien A und C die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ \pi & 11 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die (3×3)-Matrix B, sodass gilt

$$2A + 3B = 2C.$$

Aufgabe 2.2 (10 Punkte)**.** Seien A, B und C die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie explizit, dass $(AB)C = A(BC)$.

Aufgabe 2.3 (5+5 Punkte)**.** Seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass gilt

a) $A(B + C) = AB + AC$;

b) $A(kB) = k(AB) = (kA)B$;

Aufgabe 2.4 (5+5 Punkte)**.** Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ schreiben wir $A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k-\text{Mal}}$.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^k.

b) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $B = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $B^k = \begin{pmatrix} \cos(kt) & -\sin(kt) \\ \sin(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2.5 (10 Punkte)**.** Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{-1}, d.h. die eindeutige Matrix $A^{-1} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, sodass gilt $A^{-1}A = AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2.6 (10 Punkte)**.** Seien $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$(AC)^T = C^T A^T \qquad \text{und} \qquad (A + B)^T = A^T + B^T.$$

Aufgabe 2.7 (2+4+1+3 Punkte)**.**

a) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $A + A^T$ eine symmetrische Matrix ist und dass $A - A^T$ eine antisymmetrische Matrix ist.

b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige symmetrische Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ und eine eindeutige antisymmetrische Matrix $C \in M_n(\mathbb{R})$ gibt, sodass gilt
$$A = B + C.$$

c) Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ antisymmetrische Matrizen. Zeigen Sie, dass $A + B$ antisymmetrisch ist.

d) Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ antisymmetrische Matrizen. Ist AB antisymmetrisch? Symmetrisch?

Aufgabe 2.8 (5+5 Punkte)**.**

a) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass A^T invertierbar ist, und dass
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

b) Betrachten Sie die Menge der orthogonalen Martizen, definiert als
$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I_n\}.$$
Zeigen Sie, dass alle orthogonale Matrizen invertierbar sind, und dass für alle $A, B \in O(n)$, A^{-1} und AB orthogonal sind.

Aufgabe 2.9 (10 Punkte)**.** Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Zeigen Sie, dass
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \qquad ac + bd = 0 \qquad \text{und} \qquad ad - bc = \pm 1$$
gilt.

Aufgabe 2.10 (5+5 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$. Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Matrix mit koeffizienten $a_{i,j}$.

a) Nehmen Sie an, dass zwei Zeilen von A dieselbe sind. Also, es $1 \leq h \neq k \leq n$ gibt, sodass $a_{hj} = a_{kj}$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist.

b) Nehmen Sie an, dass zwei Spalten von A dieselbe sind. Also, es $1 \leq h \neq k \leq n$ gibt, sodass $a_{jh} = a_{jk}$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 2.11 (10 Punkte)**.** Seien $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \neq j \leq m$. Die Typ-3 Elementarmatrix $E^m_{ij}(\lambda)$ ist definiert als die quadratische $m \times m$-Matrix, deren Zeilen gegeben sind durch $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}, \delta_i + \lambda\delta_j, \delta_{i+1}, \ldots \delta_j, \ldots, \delta_m$. Sehen Sie auch Absatz 2.2.3 der Notitzen. Zeigen Sie, dass

$$E_{ij}(-\lambda)E_{ij}(\lambda) = I_m.$$

Aufgabe 2.12 (9+6 Punkte)**.** Seien A, B, C die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & -10 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A, B und C invertierbar sind und berechnen Sie die Inversen.

b) Schreiben Sie A, B und C als Produkte von Elementarmatrizen.

Aufgabe 2.13 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie Proposition 2.2.4 (Seite 35) der Notizen.

Aufgabe 2.14 (5 Punkte)**.** Sei A eine quadratische Matrix in der eine ganze Zeile oder eine ganze Spalte gleich null ist. Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 2.15 (5+5+5+5 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{L}_A$ die Abbildung (2.2.4), die wir in Abschnitt 2.2.2 der Notizen definiert haben, wobei $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Nehmen wir an, dass es A und B gibt, sodass

$$\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B = \mathcal{L}_B \circ \mathcal{L}_A \tag{2.0.1}$$

Beweisen Sie, dass (2.0.1) genau dann gilt, wenn A und B kommutieren, d.h. $A \cdot B = B \cdot A$. Also

$$\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B = \mathcal{L}_B \circ \mathcal{L}_A \iff A \cdot B = B \cdot A.$$

Bemerkung 2.0.1
Dieselbe Behauptung gilt für $\mathcal{R}_A$ (definiert in (2.2.5) Sektion 2.2.2 der Notizen), nämlich

$$\mathcal{R}_A \circ \mathcal{R}_B = \mathcal{R}_B \circ \mathcal{R}_A \iff A \cdot B = B \cdot A.$$

<u>Benutzen Sie Aufgabe a) bei den folgenden drei Aufgaben</u>

b) Für welche $1 \leq i, j, k, l \leq n$ mit $i < j$, $k < l$, $i \leq k$ und $k < j \leq l$ gilt, dass

$$E_{ij}E_{kl} = E_{kl}E_{ij}?$$

c) Für welche $1 \leq i, j, k, l \leq n$ mit $i \neq j$, $k \neq l$ und $i \leq k$ gilt, dass

$$E_{ij}(\lambda)E_{kl}(\mu) = E_{kl}(\mu)E_{ij}(\lambda) \qquad \text{für alle} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}?$$

d) Für welche $1 \leq i, j \leq n$ gilt, dass

$$E_i(\lambda)E_j(\mu) = E_j(\mu)E_i(\lambda) \qquad \text{für alle} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}?$$

KAPITEL 3

VEKTORRÄUME

Aufgabe 3.1 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie Lemma 3.2.1 der Notizen.

Aufgabe 3.2 (3+3+3+3+3 Punkte)**.** Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

a) Sei $R[x]$ die Menge der Polynome in R und betrachten Sie die Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ auf $R[x]$ wie in Beispiel 3.1.3. Zeigen Sie, dass $(R[x], +, \cdot)$ ein Ring ist.

b) Wir definieren ein anderes Produkt $\star$ auf $R[x]$ durch

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \star (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_k \cdot b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

Ist $(R[x], +, \star)$ ein Ring? Wenn ja, geben Sie die neutralen Elemente 0 und 1 an.

c) Sei I eine nichtleere Menge. Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}(I, R)$ die Menge aller Abbildungen $I \to R$.
Definieren Sie

$$+\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (f,g) & \mapsto & f+g \end{array} \quad \text{und} \quad \cdot\,:\, \begin{array}{ccc} \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (f,g) & \mapsto & f\cdot g \end{array}$$

als $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ ein Ring ist. Geben Sie das additive neutrale Element $0 \in \mathcal{A}$ und das multiplikative neutrale Element $1 \in \mathcal{A}$ an. Was ist $-f$?

d) Sei $P = (R[x], +, \cdot)$ (definiert in a)) mit $R = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ oder $R = (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Berechnen Sie P^* (die Einheiten von P). Ist P ein Schiefkörper?

e) Sei $Q = (\mathcal{A}(I, R), +, \cdot)$ (definiert in c)), wobei R ein Körper ist. Berechnen Sie Q^* (die Einheiten von Q). Ist Q ein Schiefkörper?

Aufgabe 3.3 (5 Punkte)**.** Sei $(H, \cdot)$ eine Gruppe und seien $a, b \in H$. Zeigen Sie, dass es eindeutige $x, y \in H$ gibt sodass

$$x \cdot a = b \qquad \text{und} \qquad a \cdot y = b.$$

Aufgabe 3.4 (10 Punkte)**.** Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, wobei G höchstens 4 Elemente hat. Zeigen Sie, dass G eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3.5 (4+4 Punkte)**.** Sei $G = \{a, b, c, d, e, f\}$. Betrachten Sie die folgende Tabelle:

$\cdot$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d		
b	b					
c	c			e		a
d	d					
f	f					

Diese Tabelle gibt einen Teil der Multiplikation $\cdot : G \times G \to G$ an (die nicht notwendig kommutativ ist!). Zum Beispiel, sehen wir an der Tabelle, dass $a \cdot c = d$ und $c \cdot f = a$. Gegeben ist, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.

a) Berechnen Sie die Produkte $c \cdot a$, $b \cdot b$ und $d \cdot f$. Erklären Sie Ihre Berechnung!

b) Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

Aufgabe 3.6 (7 Punkte)**.** Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix. Betrachten Sie den Kern der Matrix A, definiert als

$$\ker(A) = \{v \in M_{1,n}(\mathbb{R}) \mid Av^T = \mathbf{0}\}.$$

Definieren Sie eine Addition $+ : \ker A \times \ker A \to \ker A$ und eine Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \ker A \to \ker A$ sodass $(\ker A, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie tatsächlich, dass $(\ker A, +, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3.7 (4+4+4 Punkte)**.** Welche Vektoren sind linear (un)abhängig? Begrunden Sie Ihre Antwort

a)
$$(1, 1, 2), \quad (3, 3, 2), \quad (1, 2, 1) \qquad \text{im Vektorraum} \qquad \mathbb{R}^3.$$

b)
$$(1, 2, 3, 1), \quad (3, -1, -1, -3), \quad (1, -5, -7, -5) \qquad \text{im Vektorraum} \qquad \mathbb{R}^4.$$

c) Die Polynome p, q, r, s im Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ gegeben durch

$$p(x) = 1+x^2-2x^5, \qquad q(x) = x^5, \qquad r(x) = 3-\frac{\pi}{2}x^2+x^5, \qquad s(x) = 7x^2-2x^5.$$

Aufgabe 3.8 (12 Punkte)**.** Sei $\mathbb{R}[x]_n$ die Menge der Polynome in $\mathbb{R}$, deren Grad höchstens $n \in \mathbb{N}$ ist. Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}[x]_n$ an. Zeigen Sie, dass es eine Basis ist.

Aufgabe 3.9 (4+4+4+4 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie die folgende Behauptungen, ohne Proposition 3.2.6 zu benutzen.

a) Der Null-Vektor $\mathbf{0} \in V$ ist der einzige Vektor, der linear abhängig ist.

b) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängige Vektoren. Dann ist $v_i \neq \mathbf{0}$ für alle $1 \leq i \leq n$.

c) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und

$$\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\}.$$

Dann ist

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\}.$$

d) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

   i) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear abhängige Vektoren, mit $n \geq 2$.

   ii) Es existiert $j \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $v_j \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$.

Aufgabe 3.10 (10 Punkte)**.** Sei $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

In Aufgabe 3.6 haben Sie gezeigt, dass $\ker(A)$ ein Untervektorraum von $M_{1,4}(\mathbb{R})$ ist. Geben Sie eine Basis von $\ker(A)$ an.

Aufgabe 3.11 (7 Punkte)**.** Betrachten Sie den Satz 3.2.13 der Notizen. In der Vorlesung ist dieser Satz bewiesen im Fall $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ $(m \geq 1)$. Geben Sie einen Beweis des Satzes 3.2.13 im Fall $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ $(m = 0)$.

Aufgabe 3.12 (10 Punkte)**.** Seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V.

a) Geben Sie alle möglichen Bedingungen an U und W an, sodass $U \cup W$ ein Untervektorraum von V ist.

b) Zeigen Sie, dass $U + W$ der kleinste Untervektorraum von V ist, der die Menge $U \cup W$ enthält. D.h. zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $X \subseteq V$ mit $U \cup W \subseteq X$ gilt, dass $U + W \subseteq X$.

Aufgabe 3.13 (7 Punkte)**.** Betrachten Sie die Mengen

$$\begin{array}{ll} A = \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 1\}, & E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0,0)\}, \\ B = \{(t,2t,t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq t \leq 1\}, & F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 2\}, \\ C = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,2)\}, & G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}. \\ D = \{(t,1,t) \in \mathbb{R}^3\}, & \end{array}$$

Welche der Menge von A nach G sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$? Geben Sie für alle diese Untervektoräume jeweils eine Basis an. Erklären Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3.14 (6 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von Dimension 3. Sei i, j, k eine Basis von V. Seien

$$U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{i + j, i - j\} \qquad \text{und} \qquad W = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{j + k, j - k\}.$$

Zeigen Sie, dass $V = U + W$ und dass die Summe nicht direkt ist.

Aufgabe 3.15 (4+6 Punkte)**.**

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie, ob $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist.

b) Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Die Spur von A ist definiert durch

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

Sei $k \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie

$$\mathcal{S}(k) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{Spur}(A) = k\},$$

die Menge der Matrizen mit Spur k. Geben Sie alle $k \in \mathbb{R}$ an, sodass $\mathcal{S}(k)$ eine Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$ ist. Geben Sie für alle $k \in \mathbb{R}$, für die $\mathcal{S}(k)$ ein Untervektorraum ist, eine Basis von $\mathcal{S}(k)$ an.

Aufgabe 3.16 (5+5 Punkte)**.** Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \,|\, a_n \in \mathbb{R}\}$ der Folgen in $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum mit punktweiser Addition und punktweiser skalarer Multiplikation (vergleichen Sie mit $\mathcal{A}(I, V)$ in Beispiel 3.2.1 der Notizen, Seite 52, wobei $I = \mathbb{N}_0$ und $V = \mathbb{R}$). Betrachten Sie die Teilmenge der "Fibonacci-Folgen"

$$\mathrm{Fib} = \{\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \,|\, a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ein Beispiel von einem Element in Fib ist die klassische Fibonacci-Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 25, \ldots$$

a) Zeigen Sie, dass Fib ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Fib}) = 2$ und geben Sie eine Basis an.

KAPITEL 4

RANG UND DETERMINANTE EINER MATRIX

Aufgabe 4.1 (10 Punkte)**.** Betrachten Sie die Matrix $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Rang der Matrix gleich der Anzahl nicht null Zeilen ist.

Aufgabe 4.2 (10 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \dots, v_m \in V$. Sei $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_m\} = r.$$

Zeigen Sie, dass $r \leq m$ und dass es r linear unabhängige Vektoren $v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \in \{v_1, \dots, v_m\}$ gibt mit

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \dots, v_m\}.$$

Aufgabe 4.3 (5+5 Punkte)**.** Seien A, B die Matrizen mit $\mathbb{R}$-Koeffizienten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -4 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & -5 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & -2 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang dieser Matrizen.
Hinweis: Können Sie den Gauß-Jordan Algoritmus benutzen um den Rang zu berechnen?

Aufgabe 4.4 (8+6+4+2 Punkte)**.** Sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sei $b = (b_1 \ \dots \ b_m) \in M_{1,m}(\mathbb{K})$. Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$Ax^T = b^T, \tag{4.0.1}$$

wobei $x = (x_1 \ \dots \ x_n) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$. Sei $A|b \in M_{m,n+1}(\mathbb{K})$ die augmentierte Matrix

$$A|b := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass (4.0.1) Lösungen hat, genau dann wenn für den Rang
$$r(A|b) = r(A),$$
gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\ker A := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax^T = \mathbf{0}\}$ ein $n - r(A)$ dimensionaler Untervektorraum ist.

c) Nehmen Sie an, dass $r(A|b) = r(A)$. Da a) gilt, gibt es eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ der Gleichung (4.0.1). Zeigen Sie, dass die Menge der Lösungen Σ von (4.0.1) gegeben ist durch
$$x + \ker A := \{x + y \in \mathbb{K}^n \mid y \in \ker A\}.$$

d) Folgern Sie, dass die Gleichung (4.0.1) $\infty^{n-r(A)}$ Lösungen hat, genau dann wenn $r(A|b) = r(A)$.
Sehen Sie Seite 7 der Notizen für die Definition der $\infty^{n-r(A)}$ Lösungen.

Aufgabe 4.5 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -20 & 9 & 0 & 0 \\ 8 & 11 & 2 & -2 \\ 7 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.6 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie die Menge der orthogonalen Matrizen, definiert als
$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I_n\}.$$
Zeigen Sie, dass für jedes $A \in O(n)$ gilt, dass $\det A = \pm 1$. Beschreiben Sie Beispiele von $B, C \in O(3)$ mit $\det B = 1$ und $\det C = -1$.

Aufgabe 4.7 (10 Punkte)**.** Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix mit Einträgen a_{ij}, für $1 \leq i, j \leq n$. Weiterhin heißt die Matrix A eine obere Dreiecksmatrix, wenn alle Einträge von A unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i > j$. Ein Beispiel einer obere Dreiecksmatrix ist
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass für eine obere Dreiecksmatrix A gilt, dass
$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Aufgabe 4.8 (5+10 Punkte)**.**

a) Seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

wobei $* \in \mathbb{K}$ beliebige Einträge sind. Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B Determinante gleich 0 haben.

b) Sei $C \in M_n(\mathbb{K})$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\det C \neq 0$ impliziert, dass C invertierbar ist. Benutzen Sie Bemerkung 2.2.5 der Notizen und die Dekomposition einer Matrix in Elementarmatrizen um einen anderen Beweis dieser Aussage zu geben.

Aufgabe 4.9 (10 Punkte)**.** Seien $A_1, \ldots A_l \in M_n(\mathbb{K})$ und $A = A_1 A_2 \ldots A_l$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, genau dann wenn A_i, für jedes $1 \leq i \leq l$ invertierbar ist.

KAPITEL 5

LINEARE ABBILDUNGEN

Aufgabe 5.1 (10 Punkte)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung in einen $\mathbb{K}$-Vektorraum W. Zeigen Sie

$$\operatorname{Im}(F) = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}.$$

Aufgabe 5.2 (5 Punkte)**.** Zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W heißen **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt. Wir schreiben dann $V \simeq W$. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert, d.h. zeigen Sie die

a) **Reflexivität**: $V \simeq V$;

b) **Symmetrie**: Aus $V \simeq W$ folgt $W \simeq V$;

c) **Transitivität**: Aus $V \simeq W$ und $W \simeq U$ folgt $V \simeq U$.

Geben Sie dazu lineare Abbildungen zwischen den Vektorräumen an und zeigen Sie, dass diese Abbildungen Isomorphismen sind.

Aufgabe 5.3 (7+13 Punkte)**.** Definieren Sie für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ eine $(n \times n)$-Matrix A durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Determinante den Wert

$$\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

hat. Führen Sie dazu die folgenden zwei Schritte aus:

a) Änderen Sie A durch Zeilen und Spaltenoperationen zu einer Matrix der folgende Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)\, x_2 & (x_3 - x_1)\, x_3 & \cdots & (x_n - x_1)\, x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)\, x_2^{n-2} & (x_3 - x_1)\, x_3^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)\, x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

b) Schließen Sie den Beweis dann durch Induktion ab.

Aufgabe 5.4 (5 Punkte)**.** Sei V ein eindimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ ist genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt, so dass $F = \lambda \operatorname{Id}_V$ ist.

Aufgabe 5.5 (5+5 Punkte)**.** Sei $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W.

a) Zeigen Sie: Wenn der Kern von F trivial ist, bilden linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ unter F wieder auf linear unabhängige Vektoren $F(v_1), \ldots, F(v_m) \in W$ ab.

b) Gilt dies auch wenn der Kern nicht-trivial ist? Beweisen Sie dies oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 5.6 (5+5 Punkte)**.** Seien X, Y, Z Mengen und $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ Abbildungen.

a) Betrachten Sie die folgende Aussagen

   i) $G \circ F$ ist injektiv

   ii) F ist injektiv

   iii) G ist injektiv

   iv) $G\Big|_{F(X)} : F(x) \to Z$ ist injektiv.

   Geben Sie alle Implikationen zwischen Kombinationen der Aussagen i)-iv) an. Erklären Sie Ihre Antwort.

b) Formulieren Sie dieselbe Aufgabe wie oben über Surjektivität der Verknüpfungen der Abbildungen und lösen Sie diese Aufgabe.

Aufgabe 5.7 (5 Punkte)**.** Seien $v_1 = (-1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (0, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$F(v_1) = (1, 0, 0), \qquad F(v_2) = (0, 1, 0) \qquad \text{und} \qquad F(v_3) = (0, 0, 1).$$

Aufgabe 5.8 (8+7 Punkte)**.**

a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung

$$F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, x_1).$$

   Seien

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (0, -1)\} \quad \text{und} \\ &\mathbf{w} = \{w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (1, -2, 0), w_3 = (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind. Berechnen Sie die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$.

b) Sei $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung

$$G(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + 3a_3, \frac{1}{2}a_1 + 2a_2 + a_3).$$

Seien

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_1 = (1, 1, 1), x_2 = (1, -2, 0), x_3 = (0, 0, -1)\}, \quad \text{und} \\ \mathbf{y} &= \{y_1 = (-1, 1), y_2 = (0, -1)\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ Basen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ sind. Berechnen Sie die Matrix $A_{\mathbf{y},\mathbf{x}}(G)$.

Aufgabe 5.9 (5 Punkte)**.** Seien

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \{v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (1, 0, -1)\} \quad \text{und} \\ \mathbf{w} &= \{w_1 = (0, 0, 1), w_2 = (1, 1, 1), w_3 = (0, 1, 1)\}, \end{aligned}$$

Basen von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix von $\mathbf{v}$ nach $\mathbf{w}$.

Aufgabe 5.10 (5 Punkte)**.** Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung

$$F(x, y, z) = (x + 3y, 2x + 6y + 5z, 3x + 9y + z).$$

Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(F)$ und $\mathrm{Im}(F)$.

Aufgabe 5.11 (2+8 Punkte)**.** Im Abschnitt 2.2.2 der Notizen haben wir bereits eine Verbindung zwischen (linearen) Abbildungen und Matrizen gesehen. Es sei $V = M_n(\mathbb{R})$ mit der kanonischen Basis

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta} = \{&v_1 = \Delta_{11}, v_2 = \Delta_{21}, \ldots, v_n = \Delta_{n1}, v_{n+1} = \Delta_{12}, v_{n+2} = \Delta_{22}, \\ &\ldots, v_{2n} = \Delta_{n2}, v_{2n+1} = \Delta_{13}, \ldots, v_{n^2} = \Delta_{nn}\}, \end{aligned}$$

eingeführt in Beispiel 3.2.6. Mit $A \in M_n(\mathbb{R})$ sei $\mathcal{L}_A\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ die Lineare Abbildung definiert durch $\mathcal{L}_A(M) = AM$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_A$ linear ist.

b) Berechnen Sie die Matrix $A_{\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\Delta}}(\mathcal{L}_A)$.

Aufgabe 5.12 (3+3+3+3+3 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}[x]_n$ der Polynome, deren Grad höchtens n ist. Sei $D : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ die Abbildung definiert durch

$$D(p)(x) = \frac{dp(x)}{dx}.$$

a) Zeigen Sie, dass D eine lineare Abbildung ist.

b) Berechnen Sie $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(D)$ wobei $\mathbf{v} = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, \ldots, v_{n+1} = x^n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_n$ ist.

c) Finden Sie Basen von $\mathrm{Ker}(D)$ und $\mathrm{Im}(D)$.

d) Kontrolieren Sie die Formel in Satz 5.1.5 der Notizen für D.

e) Berechnen Sie $\det D$.

Aufgabe 5.13 (5+5 Punkte)**.** Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume. Seien $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}$ Basen von V und W. Sei $F : V \to W$ die lineare Abbildung mit

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $x = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$ schreiben wir $x = \mathbf{v}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. D.h. x ist der Vektor mit Koordinaten $(a_1, \ldots, a_4)$ bezüglich der Basis $\mathbf{v}$. Seien

$$\mathbf{e} = \{e_1 = \mathbf{v}(1, 1, 1, 2), e_2 = \mathbf{v}(2, -1, 3, 0), e_3 = \mathbf{v}(\sqrt{2}, 1, 0, 1), e_4 = \mathbf{v}(1, -\frac{1}{2}, 1, 5)\}$$
$$\mathbf{f} = \{f_1 = \mathbf{w}(2, -3), f_2 = \mathbf{w}(-1, 3)\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{e}$ und $\mathbf{f}$ Basen von V und W sind.

b) Berechnen Sie $A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F)$.

Aufgabe 5.14 (5+5 Punkte)**.** Betrachten Sie die Menge $M_2(\mathbb{C})$ der komplexe 2×2 Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{e} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und}$$
$$\mathbf{p} = \left\{ p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basen von $M_2(\mathbb{C})$ sind.

b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix von $\mathbf{e}$ nach $\mathbf{p}$ und die Basiswechselmatrix von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{e}$.

Aufgabe 5.15 (4+4+2 Punkte)**.** Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung

$$F(x_1, x_2, x_3, x_3) = (x_1 - x_2 + 3x_4, x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, -x_1 + x_2 - 3x_4, x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4).$$

a) Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(F)$.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Im}(F)$.

c) Berechnen Sie $\det(F)$.

KAPITEL 6

EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Aufgabe 6.1 (2+3 Punkte)**.**

a) Haben ähnliche Matrizen denselben Rang? Beweisen Sie dies, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

b) Sind Matrizen mit gleicher Determinante ähnlich? Beweisen Sie dies, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 6.2 (5 Punkte)**.** Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass $P_A(x)$ ein Polynom von Grad n ist. Zeigen Sie, dass der Koeffizient von x^n gleich $(-1)^n$ ist.

Aufgabe 6.3 (4+3+3 Punkte)**.** Sei $A \in M_2(\mathbb{K})$.

a) Drücken Sie das charakeristische Polynom durch die Determinante und die Spur (definiert in Aufgabe 3.15) von A aus.

b) Seien $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ und $D \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(CD) = \mathrm{Spur}(DC)$ ist.

c) Lemma 6.1.5 der Notizen sagt uns, dass die Koeffizienten von $P_A(x)$ und $P_B(x)$ dieselbe sind, falls A und B ähnlich sind.

   Prüfen Sie explizit diese Tatsache nach, falls $A \in M_2(\mathbb{K})$.

Aufgabe 6.4 (7+8 Punkte)**.**

a) Sei
$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$
   Berechnen Sie die Eigenwerte und Basen der assozierten Eigenräume von R.

b) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
   Berechnen Sie die Eigenwerte und Basen der assozierten Eigenräume von A. *Hinweis: $\lambda = 8$ ist eine Eigenwerte.*

Aufgabe 6.5 (10 Punkte)**.** Seien $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Nehmen Sie an, dass $AB = BA$ ist. Sei v ein Eigenvektor von A. Zeigen Sie, dass Bv ein Eigenvektor von A ist. Geben Sie eine Matrix $C \in M_n(\mathbb{R})$ an, sodass $AC = CA$ und Cv kein Eigenvektor von A ist.

Aufgabe 6.6 (5+5 Punkte)**.** Sei $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$. Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $A^0 = I_n$ und $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k-\text{Mal}}$, falls $k > 0$. Also, gegeben $p \in \mathbb{K}[x]$, können wir die Matrix $p(A)$ definieren als
$$p(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n.$$

a) Sei $\lambda \in \sigma(A)$, das Spektrum von A. Zeigen Sie, dass $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$ ist.

b) Sei $A \in M_2(\mathbb{K})$. Prüfen Sie nach, dass $p_A(A) = 0$ ist.