

Vorlesung 16



Kapitel 6: Reihen

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Folge von komplexen Zahlen

→ Macht die Summe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ Sinn?

$S_n := \sum_{i=0}^n a_i$: Folge der Partialsummen

Definition 6.0.1

Die **Reihe** $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ mit **Glieder** a_i ist die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wir sagen, dass $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ gegen $s \in \mathbb{C}$ konvergiert : $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$.

In diesem Fall wird s die **Summe** der Reihe genannt und wir schreiben

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s.$$

Falls $a_i \in \underline{\mathbb{R}} \quad \forall i$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty \quad \iff \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \underline{+\infty}$$

Beispiele :

1) Geometrische Reihe

$$a_i = q^i \rightarrow S_n := \sum_{i=0}^n q^i$$

$$\left[(q^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad q^n \rightarrow \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{exist. nicht} & q \leq -1 \end{cases} \right] (*)$$

$$S_n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \forall q \neq 1$$

$$* \quad q = 1 \quad S_n = n+1 \rightarrow \sum_{i=0}^n 1 \rightarrow +\infty$$

$$* \quad q \neq 1$$

Mit (*)

$$S_n \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ +\infty & \text{für } q \geq 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } q \leq -1 \end{cases}$$

2) Teleskopsumme

(a_i)

$$\underline{S_n} := \sum_{i=0}^n \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{(b_i)}$$

$$b_i = a_{i+1} - a_i$$

$$S_n = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \dots + (\cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}}) + (a_{n+1} - \cancel{a_n}) =$$

$$= a_{n+1} - a_0$$

(S_n) konvergiert $\Leftrightarrow \underline{(a_n)}$ konvergiert

3) Mengoli - Reihe

$$a_i = -\frac{1}{i+1} \quad i \in \mathbb{N}, \quad b_i := a_{i+1} - a_i \quad \Downarrow$$

$$\Rightarrow a_{i+1} - a_i = -\frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+1} = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} &= \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right] = \\ &= a_{n+1} - a_0 = -\frac{1}{n+2} - (-1) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = 1$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{n=i+2}$$

6.1 Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 6.1.1

(Cauchy - Kriterium) Eine komplexe Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ist konvergent genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\epsilon)$ sodass für alle $n \geq m \geq n_0$ ist

$$|a_n + a_{n-1} + \dots + a_{m+1}| < \epsilon \quad (6.1.1)$$

Beweis : (Satz 4.2.5)

① $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\iff (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy : $\iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon)$

$\forall n, m \geq n_0$

$|S_n - S_m| < \epsilon$

$\underline{n \geq m \geq n_0}$

$|a_n + a_{n-1} + \dots + a_{m+1} (+ a_m + \dots + a_0) - S_m|$



Bwk: falls $\underbrace{n = m+1}$

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

$$| \underbrace{a_n + a_{n-1} + \dots + a_{m+1}} = |a_n|$$

Cauchy-Kriterium $\rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \right.$
 $\left. \forall n \geq n_0 : |a_n| < \varepsilon \right) \Leftrightarrow \underline{a_n \rightarrow 0}$

Korollar 6.1.2

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe (s_n) ist, dass (a_n) gegen Null konvergiert.

Bwk: diese Bedingung ist nur
notwendig und nicht hinreichend

Beispiel: Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

aber ...

Behauptung 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ erfüllt das
 Cauchy-Kriterium nicht!
 Und deshalb ist nicht konvergent

Beh 2: $a_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} a_n \text{ konv.}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) :$

$$\underbrace{|S_{2n_0} - S_{n_0}|}_{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2n_0} \geq \frac{1}{2n_0} \geq \frac{1}{2n_0}$$

$$|S_{2n_0} - S_{n_0}| = \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0-1} + \dots + \frac{1}{n_0+1} \geq$$

$$\left[\forall 1 \leq k \leq 2n_0 \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0} \right]$$

$$\geq n_0 \cdot \frac{1}{2n_0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Anzahl der Summanden

6.1.1: Reelle Reihen mit nicht-negativen Gliedern

$$\sum_{n \geq 0} a_n, \quad \underbrace{a_n \geq 0}_{\text{non-negative}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Brnk, (S_n) ist monoton wachsend

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq a_0 + \dots + a_n = S_n$$

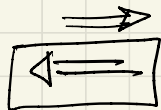
Falls (S_n) monoton wachsend ist:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} +\infty \\ S = \sup \{ S_n, n \in \mathbb{N} \} \\ \quad \hookrightarrow \text{falls } (S_n)_n \text{ beschränkt} \end{cases}$$

Prop. 6.1.3

$$\sum a_n, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \geq 0$$

Dann konvergiert (S_n) $\iff (S_n)$ beschränkt ist



Satz 4.1.7

Satz 6.1.4

(Vergleichskriterium I oder Majoranten - Kriterium)

Es seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ Reihen mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (6.1.2)$$

Dann:

(i) Falls $\sum b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n$; dazu, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = s'$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, dann ist $s \leq s'$;

(ii) Falls $\sum a_n = +\infty$, dann $\sum b_n = +\infty$.

Beweis

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$$\begin{aligned} (i) \quad S_n &:= a_0 + \dots + a_n \leq b_0 + \dots + b_n =: S'_n \\ &\quad \leq \quad \quad \quad \leq \\ &\quad b_0 \quad \quad \quad b_n \\ S_n &\leq S'_n \leq S' \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ &\quad \text{monoton} \quad \quad \sum b_n = \\ &\quad \text{wachsend} \quad \quad = \sup \{ S'_n, n \in \mathbb{N} \} \\ \Rightarrow \boxed{S_n \leq S'} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \rightarrow (S_n) \text{ beschränkt, } (S_n) \text{ monoton} \\ &\quad \quad \quad (a_n \geq 0) \rightarrow \text{wachsend} \\ &\quad \rightarrow S_n \rightarrow \sup \{ S_n, n \in \mathbb{N} \} =: S \end{aligned}$$

$$s_n \leq s'$$

$$s_n \text{ Konv. gegen } s = \sup \{s_n, n \in \mathbb{N}\} \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{s \leq s'}$$

(ii) Übung

Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} : \begin{cases} +\infty & \forall \alpha \leq 1 \quad (A) \\ \text{Konvergiert} & \forall \alpha \geq 2 \quad (B) \end{cases}$$

$$(A) \quad \alpha \leq 1, \quad n^{\alpha} \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$0 \leq \sum \frac{1}{n} \leq \sum \frac{1}{n^{\alpha}} \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty \quad \forall \alpha \geq 1$$

$$(B) \quad \alpha \geq 2$$

$$\alpha = 2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\left[\sum_{n \geq n_0} a_n \text{ Konv.} \right] \Downarrow \left[\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \right]$$

Mengoli-Reihe: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1$

$$(n-1)n \leq n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n-1) \cdot n} \geq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1) \cdot n} \text{ (Konvergiert)} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ Konvergiert gegen } s \text{ (} s \leq 1 \text{)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow s+1 \leq 2$$

$$\bullet \quad \underline{\alpha > 2} \quad n^\alpha > n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \gg \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\leadsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}}_{< +\infty} \quad \text{Konv.}$$

Buch : Sehr schwer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{explizit zu finden}$$

$\parallel$
 S

$S \leadsto ?$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \quad s=2n$$

Korollar 6.1.5

(**Vergleichskriterium II**) Es seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ Reihen mit positiven reellen Gliedern. Nehmen wir an, dass

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0 \quad \text{und schreiben } a_n \sim b_n$$

$$a_n, b_n > 0 \quad \forall n$$

Dann konvergiert $\sum a_n$ genau dann, wenn $\sum b_n$ konvergiert (und divergiert $\sum a_n$ gegen $+\infty$ genau dann, wenn $\sum b_n$ gegen $+\infty$ divergiert.)

Beweis : Übung

Beispiele

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

(1) $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergiert

(i) $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} 1 < \frac{\pi}{2} \\ \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \end{array} \right)$$

$$(2) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + n + 1}{n^6 + n^5 + 2}$$

$$\frac{n^2 + n + 1}{n^6 + n^5 + 2} \sim \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{\frac{n^2 + n + 1}{n^6 + n^5 + 2}}{\frac{1}{n^4}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n^6 + n^5 + n^4}{n^6 + n^5 + 2} = \\
 &= \frac{\cancel{n^6} \left(\underset{\nearrow 0}{1} + \underset{\nearrow 0}{\frac{1}{n}} + \underset{\nearrow 0}{\frac{1}{n^2}} \right)}{\cancel{n^6} \left(\underset{\nearrow 0}{1} + \underset{\nearrow 0}{\frac{2}{n^6}} \right)} = \frac{1}{1}
 \end{aligned}$$

Bmk Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$

$\Rightarrow$ können wir auch sagen

$$\sum a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ konv.}$$

(Übung)

Satz 6.1.6

(**Wurzelkriterium**) Es sei $\sum a_n$ eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern a_n . Falls ein q existiert, sodass $0 \leq q < 1$ und eine n_0 existiert, sodass

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < \underbrace{1}_{\text{für alle } n \geq n_0},$$

dann ist die Reihe $(\sum a_n)$ konvergent. Falls $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ für unendliche viele Indizes n , dann divergiert $\sum a_n$ gegen unendlich.

Bew. : (falls $\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \forall n \text{ ist } \dots$)

$$\text{Falls } \underbrace{\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1}_{\text{für alle } n \geq n_0}$$

Es reicht nicht aus, zu zeigen, dass

$$\left[\sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \forall n \geq n_0 \right]$$

$\Rightarrow \sum a_n < +\infty$ gilt nicht

Gegenbeispiel : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \quad \forall n \geq 2$$

$\sqrt[n]{n} > 1 \quad \forall n > 1$

Beweis :

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q$$

$$a_n \leq q^n, \quad 0 < q < 1$$

Majorante - Kriterium

$\sum a_n$ konvergent

$$\sum_{n \geq n_0} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$$

(iii) Falls $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ für unendlich viele Indizes

$$\Rightarrow [a_n \not\rightarrow 0]_{n \rightarrow \infty} \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

Übung: beweisen Sie)

