Prof. Silvia Sabatini *Universität zu Köln*
Dr. Alexander Caviedes Castro *21.12.2020*

ANALYSIS I
Übungsblatt 8

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 11.01.2021, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1.

- Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei I ein Intervall ist. Nehmen Sie an, dass das Bild $f(I)$ nach unten (bzw. nach oben) unbeschränkt ist. Beweisen Sie, dass $f(I)$ ein Intervall der Gestalt $(-\infty, a)$ oder $(-\infty, a]$ ist, wobei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = +\infty$ (bzw. $f(I)$ ein Intervall der Gestalt $(a, +\infty)$ oder $[a, +\infty)$ ist, wobei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = -\infty$).
- Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nehmen Sie an, dass $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (bzw. dass $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$). Beweisen Sie, dass f eine Nullstelle besitzt, d.h. existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $f(x_0) = 0$.
- Beweisen Sie, ohne Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra, dass jedes Polynom ungeraden Grades (mindestens) eine reelle Nullstelle hat.

Präsenzaufgabe 2.

1. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge A von K auch kompakt ist.
2. Es seien $A_1, \ldots, A_n$ kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Mengen
$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$
kompakt sind.
3. Es sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Sind die Mengen
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$
kompakt? Rechtfertigen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 1. (5 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)\,.$$
Zeigen Sie, dass die Funktion f nicht surjektiv ist.

Hausaufgabe 2. (11= 4 + 3 + 4 Punkte)

(a) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl $x \in [0,1]$ existiert, so dass
$$f(x) = x$$
gilt.

(b) Geben Sie eine Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ mit $g(x) \neq x$ für alle $x \in [0,1]$ an.

(c) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit der Periode T, wenn $T \neq 0$ und
$$f(x) = f(x+T) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$
Es sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische stetige Funktion mit der Periode T. Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl x gibt, so dass
$$f(x) = f(x + T/2)$$
gilt.

Hausaufgabe 3. (4 = 1+1+1+1 Punkte) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Behauptungen ist wahr und welche ist falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Wenn A kompakt ist und B abgeschlossen ist, dann $A \cap B$ kompakt ist.

(b) Wenn A offen ist und B abgeschlossen ist, dann $A \cap B$ abgeschlossen ist.

(c) Wenn A zusammenhängend ist und B zusammenhängend ist, dann $A \cap B$ zusammenhängend ist.

(d) Wenn A zusammenhängend ist und B zusammenhängend ist, dann $A \cup B$ zusammenhängend ist.

Hausaufgabe 4. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ genau dann zusammenhängend ist, wenn für jede nicht-leere Teilmenge $A \subsetneq D$ die Menge $\partial A \cap D$ nicht leer ist.