Prof. Dr. Silvia Sabatini Sommersemester 2016

Klausur Topologie 6LP

27.07.16, 15:30 – 18:30

Es sind keine Hilfsmittel (Skript, Taschenrechner...) erlaubt. Täuschungsversuche, auch zugunsten anderer, führen zum Ausschluß von der Klausur. Taschen, Jacken und Mobiltelephone etc. sind im Hörsaal vorne zu deponieren. Wird das Mobiltelephon o.ä. nicht abgegeben, so gilt dies als Täuschungsversuch.
Begründen Sie stets Ihre Antworten. Antworten ohne Begründung liefern keine Punkte.
Die Aufgaben sind auf den entsprechenden Blättern (einschließlich Rückseite) zu bearbeiten. Falls Sie die am Ende angehefteten Leerseiten benutzen, machen Sie bitte einen Verweis bei der jeweiligen Aufgabe. Die Notizzettel können **nicht** mit abgegeben werden. Verwenden Sie ausschließlich schwarze oder blaue Tinte/Kugelschreiber.
Die Klausur umfaßt 5 Aufgaben.

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Klausurnummer: 1

Unterschrift

Den unteren Teil dieses Blattes **nicht** beschriften!

Aufgabe	Punkte		Aufgabe	Punkte
1			4	
2			5	
3				
Gesamt:				

Aufgabe 1. (1+9 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, d.h. die Menge der Teilmengen von X. Sei $\mathcal{C}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mathcal{C}(\emptyset) = \emptyset$,

ii) $A \subseteq \mathcal{C}(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$,

iii) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

a) Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \subseteq B$ gilt, dass $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{S} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A = \mathcal{C}(A)\}$$

die Axiome der Menge der abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X erfüllt.

Lösung 1.

a) $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(B)$.

b) Durch i) gilt $\emptyset \in \mathcal{S}$. Auch wissen wir dass $X \subseteq \mathcal{C}(X) \subseteq X$ sodass $\mathcal{C}(X) = X$, und $X \in \mathcal{S}$. Sei $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{S}$ mit I endlich. Dann gilt dass $\mathcal{C}(\bigcup_i (U_i)) = \bigcup_i \mathcal{C}(U_i)$ durch Induktion von iii). Aber $\mathcal{C}(U_i) = U_i$, sodass $\mathcal{C}(\bigcup_i (U_i)) = \bigcup_i U_i$, und $\bigcup_i U_i \in \mathcal{S}$. Sei jetzt $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{S}$ mit I beliebig. Durch ii) wissen wir, dass $\bigcap_i U_i \subseteq \mathcal{C}(\bigcap_i U_i)$. Natürlich gilt auch $\bigcap_i U_i \subseteq U_j$ für jede $j \in I$. Mit Teilaufgabe a) wissen wir dann, dass $\mathcal{C}(\bigcap_i U_i) \subseteq \mathcal{C}(U_j) = U_j$ für jede j. Es folgt, dass $\mathcal{C}(\bigcap_i U_i) \subseteq \bigcap_j U_j$ und damit, dass $\mathcal{C}(\bigcap_i U_i) = \bigcap_i U_i$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Sei $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}) \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{Eukl}})$ die Menge der rationalen Zahlen mit induzierter Teilmengentopologie. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{Q}, 0)$.

Lösung 2.

Wir zeigen dass jede Abbildung $f\colon I \to \mathbb{Q}$ konstant ist. Nehmen Sie an dass es Punkte $x, y \in I$ gibt mit $f(x) < f(y)$. Dan gibt es ein irationales Zahl z mit $f(x) < z < f(y)$. Die Menge $(-\infty, z) \cap \mathbb{Q}$ und $(z, \infty) \cap \mathbb{Q}$ sind offen und abgeschlossen in $\mathbb{Q}$, weil $((\infty, z) \cap \mathbb{Q}) \cup ((z, \infty) \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Die Funktion f ist stetig, sodass $f^{-1}((-\infty, z) \cap \mathbb{Q})$ und $f^{-1}((z, \infty) \cap \mathbb{Q})$ nicht lehr, offen und disjunkt sind in I. Aber I ist zusammenhängend, was ein Wiederspruch ist. Wir konkludieren, dass f konstant ist. Es folgt einfach, dass $\pi(\mathbb{Q}, 0)$ die triviale Gruppe ist, da er nur ein schleife ist mit Basispunkt 0.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen, sodass weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$. Zeigen Sie, dass $C := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ nicht zusammenhängend ist.

Lösung 3.

A ist abgeschlossen in X sodass $A \cap C = A \setminus B$ abgeschlossen ist in C. $X \setminus B$ ist offen in X sodass $X \setminus B \cap C = A \setminus B$ offen ist in C. So $A \setminus B$ ist offen und geschlossen in C, und gleichweis ist $B \setminus A$ offen und geschlossen in C. Bemerken Sie, dass $A \setminus B$ und $B \setminus A$ nicht lehr sind, und $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Wir konkludieren, dass C nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Sei die Späre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ mit Teilraumentopologie von $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $\pi_1(S^n)$ die triviale Gruppe ist für alle $n \geq 3$. Hier dürfen Sie benutzen, dass $\pi_1(S^2)$ trivial ist.

Lösung 4.

Die Sphäre $S^n = \{(x_0, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_0^2 + \dots x_n^2 = 1\}$ ist die Vereinigung der offenen Menge

$$U = S^n \cap \{(x_0, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_0 < \frac{1}{2}\}, \qquad V = S^n \cap \{(x_0, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_0 > -\frac{1}{2}\}.$$

U, V sind zusammensiebahr zu $(-1, 0, \dots, 0)$ und $(1, 0, \dots, 0)$, und $U \cap V$ ist homotopie Äquivalent zu $S^n \cap \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_0 = 0\} \cong S^{n-1}$. Mit Induction nehmen wir an dass ist S^{n-1} einfach zusammenhängend ist , sodass Seifert van Kampen gibt dass

$$\pi_1(S^n) = \pi_1(U \cup V) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V),$$

und $\pi_1(S^n)$ ist einfach zusammenhängend für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 5. (5+5 Punkte)

a) Sei X ein Hausdorffraum. Sei $F \subseteq X$ eine endliche Teilmenge. Zeigen Sie, dass F eine abgeschlossene Menge ist.

b) Geben Sie ein Beispiel eines Raums X und $F \subseteq X$ eine endliche Teilmenge, sodass F nicht abgeschlossen ist.

Lösung 5.

a) Sei $y \in X \setminus F$. Für jede $x \in F$ gibt es offene Menge U_x, V_x mit $y \in U_x$, $x \in V_x$ sodass $U_x \cap V_x = \emptyset$. Da F endlich ist, haben wir dass $\bigcap_{x \in F} U_x$ offen ist. Bemerken Sie das $F \cap \bigcap_{x \in F} U_x = \emptyset$ und $y \in \bigcap_{x \in F} U_x$. Die Menge F ist abgeschlossen.

b) Sei X eine Menge mit mehr als zwei Punkte. Geben Sie X die triviale Topologie. Dan ist $\overline{\{x\}} = X \neq \{x\}$, sodass $F = \{x\}$ nicht abgeschlossen ist.

Prof. Dr. Silvia Sabatini Sommersemester 2016

Klausur Topologie 9LP

27.07.16, 15:30 – 18:30

Es sind keine Hilfsmittel (Skript, Taschenrechner...) erlaubt. Täuschungsversuche, auch zugunsten anderer, führen zum Ausschluß von der Klausur. Taschen, Jacken und Mobiltelephone etc. sind im Hörsaal vorne zu deponieren. Wird das Mobiltelephon o.ä. nicht abgegeben, so gilt dies als Täuschungsversuch.
Begründen Sie stets Ihre Antworten. Antworten ohne Begründung liefern keine Punkte.
Die Aufgaben sind auf den entsprechenden Blättern (einschließlich Rückseite) zu bearbeiten. Falls Sie die am Ende angehefteten Leerseiten benutzen, machen Sie bitte einen Verweis bei der jeweiligen Aufgabe. Die Notizzettel können **nicht** mit abgegeben werden. Verwenden Sie ausschließlich schwarze oder blaue Tinte/Kugelschreiber.
Die Klausur umfaßt 5 Aufgaben.

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Klausurnummer: 2

Unterschrift

Den unteren Teil dieses Blattes **nicht** beschriften!

Aufgabe	Punkte		Aufgabe	Punkte
1			4	
2			5	
3				
Gesamt:				

Aufgabe 1. (1+9 Punkte)

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, d.h. die Menge der Teilmengen von X. Sei $\mathcal{C}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mathcal{C}(\emptyset) = \emptyset$,

ii) $A \subseteq \mathcal{C}(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$,

iii) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

a) Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \subseteq B$ gilt, dass $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$.

b) Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{S} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A = \mathcal{C}(A)\}$$
die Axiome der Menge der abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X erfült.

<u>Lösung</u> 1.

a) $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(B)$.

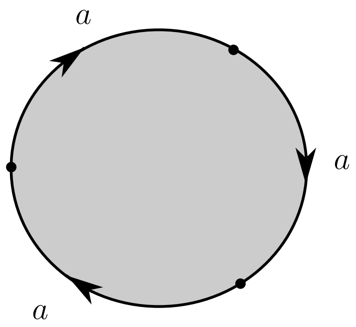
b) Durch i) gilt $\emptyset \in \mathcal{S}$. Auch wissen wir dass $X \subseteq \mathcal{C}(X) \subseteq X$ sodass $\mathcal{C}(X) = X$, und $X \in \mathcal{S}$. Sei $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{S}$ mit I endlich. Dann gilt dass $\mathcal{C}(\bigcup_i (U_i)) = \bigcup_i \mathcal{C}(U_i)$ durch Induktion von iii). Aber $\mathcal{C}(U_i) = U_i$, sodass $\mathcal{C}(\bigcup_i (U_i)) = \bigcup_i U_i$, und $\bigcup_i U_i \in \mathcal{S}$. Sei jetzt $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{S}$ mit I beliebig. Durch ii) wissen wir, dass $\bigcap_i U_i \subseteq \mathcal{C}(\bigcap_i U_i)$. Natürlich gilt auch $\bigcap_i U_i \subseteq U_j$ für jede $j \in I$. Mit Teilaufgabe a) wissen wir dann, dass $\mathcal{C}(\bigcap_i U_i) \subseteq \mathcal{C}(U_j) = U_j$ für jede j. Es folgt, dass $\mathcal{C}(\bigcap_i U_i) \subseteq \bigcap_j U_j$ und damit, dass $\mathcal{C}(\bigcap_i U_i) = \bigcap_i U_i$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Sei $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}) \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{Eukl}})$ die Menge der rationalen Zahlen mit induzierter Teilmengentopologie. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{Q}, 0)$.

Lösung 2.

Wir zeigen dass jede Abbildung $f\colon I \to \mathbb{Q}$ konstant ist. Nehmen Sie an dass es Punkte $x, y \in I$ gibt mit $f(x) < f(y)$. Dan gibt es ein irationales Zahl z mit $f(x) < z < f(y)$. Die Menge $(-\infty, z) \cap \mathbb{Q}$ und $(z, \infty) \cap \mathbb{Q}$ sind offen und abgeschlossen in $\mathbb{Q}$, weil $((\infty, z) \cap \mathbb{Q}) \cup ((z, \infty) \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Die Funktion f ist stetig, sodass $f^{-1}((-\infty, z) \cap \mathbb{Q})$ und $f^{-1}((z, \infty) \cap \mathbb{Q})$ nicht lehr, offen und disjunkt sind in I. Aber I ist zusammenhängend, was ein Wiederspruch ist. Wir konkludieren, dass f konstant ist. Es folgt einfach, dass $\pi(\mathbb{Q}, 0)$ die triviale Gruppe ist, da er nur ein schleife ist mit Basispunkt 0.



Der Raum Y.

<u>Aufgabe</u> 3. (4+6 Punkte)

Sei $X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$. Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ mit der Euklidischen Topologie.

a) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$.

Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z|^2 \leq 1\}$ mit Teilmengentopologie von der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{C}$ und definieren Sie die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$z \sim w \colon \iff z = w, \qquad \text{oder} \qquad \|z\| = \|w\| = 1 \quad \text{und} \quad z = e^{\frac{2\pi i}{3}k} w \quad \text{für} \quad k \in \{1,2\}.$$

Sei $Y := D/\sim$. Der Raum Y ist das 3-gon unter Identifikation des Wortes a^3. Siehe Skizze.

b) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y)$.

Es ist in dieser Aufgabe nicht notwendig Formeln für Homotopieäquivalenzen anzugeben. Es ist genug dies an einer Skizze gut zu Erklären.

Lösung 3.

Seien X und Y Räume und $x \in X$ und $y \in Y$ Basispunkte. Wenn x und y Umgebungen haben sodass x und y Deformationsretrakten sind von diesen Umgebungen läss Seifert-van Kampen sehen, dass $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

a) In der Vorlesung ist gezeigt, dass $\mathbb{R}^3 \setminus X_1$ Homotopieäquivalent ist zu $S^2 \vee S^1$. Mit der Bemerkung oben sehen wir, dass $\pi_1(S^2 \vee S^1) \cong \pi_1(S^2) * \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

b) Sei $U = \{[z] \in Y \mid |z|^2 < \frac{3}{4}\}$, und $V = Y \setminus \{[0]\}$. Dann gilt dass U zusammensiehbahr ist, und V Homotopieäquivalent ist zu S^1. Der durchschnitt $U \cap V = U \setminus \{[0]\}$ ist auch Homotopieäquivalent zu S^1. Sei $\alpha\colon [0,1] \to V$ die Schleife gegeben durch $\alpha(t) = e^{\frac{2\pi t}{3}}$, und sei $\gamma\colon [0,1] \to U \cap V$ die Schleife $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi i t}$. Dann ist $[\gamma]$ ein generator von $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ und $[\alpha]$ ein generator von $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$. Wir haben dass $i_*([\gamma]) = [\alpha]^3$ und Seifert van Kampen gibt $\pi_1(Y) = \langle [\alpha] | [\alpha]^3 \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Sei $M := [0,1] \times [0,1]/\sim$ wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist dürch

$$(x,y) \sim (x',y') :\Longleftrightarrow (x = x', y = y'), \quad \text{oder} \quad (x = 0, x' = 1, y = 1 - y'),$$
$$\text{oder} \quad (x = 1, x' = 0, y = 1 - y').$$

Der Raum M ist das abgeschlossene Möbiusband. Sei

$$\partial M := \{[(x,y)] \in M \mid y = 0 \quad \text{oder} \quad y = 1\}$$

der Rand des Möbiusbandes. Zeigen Sie, dass es keine Retraktion $r\colon M \to \partial M$ gibt.

<u>Lösung</u> 4.

Wir vergessen die Basispunkte hier. Der Möbiusband ist homotop zu S^1, und der Rand des Möbiusbands ist Homöomoprh zu S^1. Wir haben dass $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ frei generiert durch die Schleife $\gamma\colon I \to M$ mit $\gamma(t) = [t, \frac{1}{2}]$. Der Rand des Möbiusbands ist eine Schleife α die homotop ist zu der Sleife $t \mapsto [2t \pmod 1), \frac{1}{2}]$, und dass ist $2[\gamma]$ in $\pi_1(M)$. Nehmen Sie an, dass es eine Retrakt $r\colon M \to \partial M$ gibt. Sei $i\colon \partial M \to M$ die Inklusion. Dan haben wir $ri = \mathrm{id}$ sodass $r_* i_* = \mathrm{id}$. Es gibt kein Homomorphismus $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\phi(2) = 1$, sodass ein Retrakt wie oben nicht existiert.

Aufgabe 5. (3+7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass kein nicht-trivialer Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ existiert.

Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum mit $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f\colon X \to S^1$ zusammenziehbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$.

<u>Lösung</u> 5.

Bemerken Sie, dass es kein element $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gibt mit, $a + a = 0$. Ein homomorphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ hat $0 = f(\overline{0}) = f(\overline{1} + \overline{1})$, sodass $2f(\overline{1}) = 0$ und $f(\overline{1}) = 0$. Es folgt, dass $f_*(\pi_1(X))$ die triviale Untegruppe ist von $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, und dass $f_*(\pi_1(X)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}))$. Mit ein Lemma aus der Vorlesung gibt es eine Lift $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$, mit $f = p\tilde{f}$. Sei $\tilde{f}_t$ eine Homotopie von $\tilde{f}$ zu eine konstant Abbildung $\tilde{f}_1$. Das existiert da $\mathbb{R}$ zusammenziebar ist. Aber dann ist $f_t = p\tilde{f}_t$ eine Homotopie von f zu eine konstante Abbildung $p\tilde{f}_1$.