

---

## Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 14

Die folgenden Aufgaben können zur Klausurvorbereitung genutzt werden.

### Aufgabe 1. (0 Punkte)

Eine Raumkurve mit nirgends-verschwindender Krümmung liegt in einer Ebene genau dann wenn ihre Torsion verschwindet.

### Aufgabe 2. (0 Punkte)

Der Tangentialraum einer Fläche ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ .

### Aufgabe 3. (0 Punkte)

Sei  $\varphi: M \rightarrow N$  eine Isometrie zwischen zwei Flächen. Zeigen Sie, dass die Länge einer Kurve unter  $\varphi$  erhalten bleibt. Umgekehrt ist ein Diffeomorphismus  $\varphi: M \rightarrow N$ , der die Bogenlänge von Kurven erhält, eine Isometrie.

### Aufgabe 4. (0 Punkte)

Ein **Nabelpunkt** ist ein Punkt auf einer Fläche in dem jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung ist, d.h.  $\kappa_1 = \kappa_2$ .

- Jeder Punkt auf der Kugel  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  ist ein Nabelpunkt.
- Eine kompakte zusammenhängende Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , die nur aus Nabelpunkten besteht, ist die Kugel  $S^2$ .
- Jede kompakte zusammenhängende Fläche im  $\mathbb{R}^3$  besitzt mindestens einen Punkt mit positiver Gauß-Krümmung  $\kappa$ .
- (schwer) Ein Punkt  $p$  auf einer kompakten zusammenhängenden Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit  $\kappa(p) > 0$ , der gleichzeitig ein lokales Maximum für  $\kappa_1$  und ein lokales Minimum für  $\kappa_2$  ist, ist ein Nabelpunkt.
- Die Starrheit der Kugel : Eine kompakte zusammenhängende Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit konstanter Gauß-Krümmung  $\kappa$  ist die Kugel  $S^2$ .

### Aufgabe 5. (0 Punkte)

Beschreiben Sie alle Geodätische auf der 2-Kugel und möglichst viele auf dem 2-Torus.