
Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 14

Die folgenden Aufgaben können zur Klausurvorbereitung genutzt werden.

Aufgabe 1. (0 Punkte)

Eine Raumkurve mit nirgends-verschwindender Krümmung liegt in einer Ebene genau dann wenn ihre Torsion verschwindet.

Aufgabe 2. (0 Punkte)

Der Tangentialraum einer Fläche ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 3. (0 Punkte)

Sei $\varphi: M \rightarrow N$ eine Isometrie zwischen zwei Flächen. Zeigen Sie, dass die Länge einer Kurve unter φ erhalten bleibt. Umgekehrt ist ein Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow N$, der die Bogenlänge von Kurven erhält, eine Isometrie.

Aufgabe 4. (0 Punkte)

Ein **Nabelpunkt** ist ein Punkt auf einer Fläche in dem jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung ist, d.h. $\kappa_1 = \kappa_2$.

- (a) Jeder Punkt auf der Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Nabelpunkt.
- (b) Eine kompakte zusammenhängende Fläche im \mathbb{R}^3 , die nur aus Nabelpunkten besteht, ist die Sphäre S^2 .
- (c) Jede kompakte zusammenhängende Fläche im \mathbb{R}^3 besitzt mindestens einen Punkt mit positiver Gauß-Krümmung κ .
- (d) (schwer) Ein Punkt p auf einer kompakte zusammenhängenden Fläche im \mathbb{R}^3 mit $\kappa(p) > 0$, der gleichzeitig ein lokales Maximum für κ_1 und ein lokales Minimum für κ_2 ist, ist ein Nabelpunkt.
- (e) Die Starrheit der Sphäre : Eine kompakte zusammenhängende Fläche im \mathbb{R}^3 mit konstanter Gauß-krümmung κ ist die Sphäre S^2 .

Aufgabe 5. (0 Punkte)

Beschreiben Sie alle Geodätsche auf der 2-Sphäre und möglichst viele auf dem 2-Torus.