Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
18.10.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 2

Diese Übungen müssen bis spätestens 11:55 Uhr Mittwoch 25.10.17, in den Briefkästen im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden.
Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackeren Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkten)

(a) Zeigen Sie, dass sich die Krümmung unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen nicht ändert.

(b) Es sei $u\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre parametrisierte Kurve, und $t_0 \in I$ mit Krümmung $k(t_0) \neq 0$. Beweisen Sie, dass das Zentrum C des Kreises, der die Kurve im Punkt $u(t_0)$ am besten approximiert, durch

$$C = u(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} J\left(\frac{\dot{u}(t_0)}{\|\dot{u}(t_0)\|}\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 2. (15 Punkten)

Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve gegeben durch

$$\alpha(t) = \big(\cos(t), \sin(2t)\big).$$

(a) Skizzieren Sie α.

(b) Zeigen Sie, dass α periodisch ist und berechnen sie die Periode L, das heißt: Finden Sie die kleinste reelle Zahl $L > 0$, so dass $\alpha(t + L) = \alpha(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Parameter $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha(t) = (0, 0)$.

(d) Berechnen Sie die Tangenten von α an $(0, 0)$.

(e) Beschreiben Sie einen Einheitstangential- und einen Einheitsnormalenvektor von α.

(f) Bestimmen Sie die Krümmung von α und zeigen Sie, dass die Krümmung periodisch ist. Was ist die Periode der Krümmung?

Aufgabe 3. (15 Punkten)

Sei $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve gegeben durch

$$\beta(t) = \big(e^t, \cosh(t)\big).$$

(a) Skizzieren Sie β.

(b) Berechnen Sie die Krümmung von β.

(c) Wo ist die Krümmung maximal und was ist die maximale Krümmung?

Aufgabe 4. (10 Punkten)

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve gegeben durch

$$c(t) = (t, t^2).$$

Berechnen Sie die Kreise, die die Kurve zu dritter Ordnung approximieren in den Punkten $(0,0), (-1,1)$ und $(1,1)$.