Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
11.10.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 1

Diese Übungen müssen bis spätestens 11 :55 Uhr Mittwoch 18.10.17, in den Briefkästen im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden.

Aufgabe 1. (5 Punkten)

Sei $u : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige differenzierbare parametrisierte Kurve und $\phi : [0,1] \to [0,1]$ ein Diffeomorphismus. Definieren Sie $v := u \circ \phi$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \|\dot{u}(t)\| dt = \int_0^1 \|\dot{v}(t)\| dt,$$

gilt.

Aufgabe 2. (10+10 Punkten)

(a) Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve gegeben durch

$$u(t) = (t, \cosh(t)).$$

Finden Sie eine Umparametrisierung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dieser Kurve, sodass v nach Bogenlänge parametrisiert ist.
(b) Betrachten Sie die Kurve $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$u(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

für $a, b > 0$. Skizzieren Sie u und parametrisieren Sie u nach Bogenlänge.

Aufgabe 3. (15 Punkten)

Die Länge einer stetigen Kurve ist definiert durch

$$L(u) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} \|u(t_j) - u(t_{j-1})\| \;\Big|\; k \in \mathbb{N}, \quad t_0, \ldots, t_k \in I \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_k \right\}.$$

Sei $u : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve

$$u(t) = \begin{cases} (t, t\sin(1/t)), & \text{für } t > 0, \\ (0,0), & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Spur von u.

b) Ist es erlaubt die Formel
$$L(u) = \int_0^1 \|\dot{u}(t)\| dt$$
zu benutzen um die Länge von u zu berechnen ? Erläutern Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie $L(u)$.
Hinweis : Was ist $u(\frac{1}{\pi k + \frac{\pi}{2}})$ *für* $k \in \mathbb{N}$ *?*

Aufgabe 4. (10 Punkten)

Gegeben sei die Kurve
$$u(t) = (t\cos t, t\sin t, t^2), \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

a) Skizzieren Sie die Spur von u.

b) Zeigen Sie, dass u regulär ist und bestimmen Sie das maximale Intervall I (mit Zentrum 0), so dass $u|_I$ injektiv ist.

c) Bestimmen Sie die Länge $L(t)$ der Kurve $u|_{[0,t]}$.