Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
28.05.2018

Topologie: Übungsblatt 7

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 04.06.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (4+4+4 Punkte)

a) Sei $\mathcal{T}_{\text{eucl}}$ die Euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass jede offene zusammenhängende Teilmenge im $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{eucl}})$ wegzusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie, dass eine zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit wegzusammenhängend ist.

c) Sei S^n die n-dimensionale Sphäre. Beweisen Sie, dass wenn $n \geq 2$, S^n und S^1 nicht homöomorph sind.

Aufgabe 2. (13 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

i) X ist ein zusammenziehbarer Raum.

ii) Die Identität $\text{id} : X \to X$ ist nullhomotop, d.h. id ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

iii) Jede Abbildung $f : X \to Y$ in einem beliebigen topologischen Raum Y ist nullhomotop.

iv) Jede Abbildung $g : Y \to X$ aus einem beliebigen topologischen Raum Y, ist nullhomotop.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum mit diskreter Topologie. Sei $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(X; x_0) = [\gamma_{x_0}],$$

wobei $\gamma_{x_0} : [0,1] \to X$ definiert ist durch $\gamma_{x_0}(t) = x_0$.

Aufgabe 4. (5+5+5 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum, und seien $f, g : X \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetige Abbildungen mit $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$.

a) Zeigen Sie, dass f homotop ist zu g.
Hinweis : Das Segment $t \mapsto tf(x) + (1-t)g(x)$ *geht nicht durch* $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ *für alle* $x \in S^n$.

b) Benutzen Sie Teil a) um zu zeigen, dass wenn f nicht surjektiv ist, dann ist f nullhomotop.

Wir können auch auf eine andere Weise Teil b) beweisen :
Erinneren Sie sich daran, dass $S^n \setminus \{p\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, für jedes $p \in S^n$.

c) Benutzen Sie dies, um b) zu zeigen.