

Topologie: Übungsblatt 0

Diese Woche werden die Übungen nicht korrigiert.

Aufgabe 1. (0 Punkte)

Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und definieren Sie die folgenden Untermengen von $\mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &= \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}\} \\ \mathcal{O}_2 &= \{X, \emptyset, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\} \\ \mathcal{O}_3 &= \{X, \{2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\} \\ \mathcal{O}_4 &= \{X, \emptyset, \{5\}, \{1, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}\} \\ \mathcal{O}_5 &= \{X, \emptyset, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}\}.\end{aligned}$$

Kontrollieren Sie welche der Menge \mathcal{O}_i Topologien sind.

Aufgabe 2. (0 Punkte)

Sei X eine nicht-leere Menge, und definieren Sie $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ durch

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{K}, \\ U \subset X, X \setminus U \text{ ist endlich} &\Rightarrow U \in \mathcal{K}.\end{aligned}$$

Kontrollieren Sie, dass \mathcal{K} eine Topologie ist. Sie heißt die koendliche Topologie auf X . Bemerken Sie, dass \mathcal{K} die diskrete Topologie auf X ist, genau dann wenn X endlich ist.

Aufgabe 3. (0 Punkte)

Sei \mathcal{O} eine Topologie auf \mathbb{R}^n die feiner ist als die gewöhnliche Euklidische Topologie \mathcal{T} auf \mathbb{R}^n (d.h. : $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$). Nehmen Sie an, dass \mathcal{O} die Eigenschaft hat, dass ein beliebiger Durchschnitt von Mengen $O \in \mathcal{O}$ wieder in \mathcal{O} ist. Zeigen Sie, dass \mathcal{O} die diskrete Topologie auf \mathbb{R}^n ist.

Aufgabe 4. (0 Punkte)

Sei $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Topologien auf X .

- Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ ein Topologie auf X ist.
- Finden Sie eine Menge X und Topologien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ auf X , sodass $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ keine Topologie auf X ist.