Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
09.4.2018

Topologie: Übungsblatt 1

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 16.4.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

N.B. Wir haben die Konvention, dass das Symbol $X \subset Y$ nicht impliziert, dass $X \neq Y$ gilt.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Seien $X \neq \emptyset$, und $J : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften :

i) $J(X) = X$
ii) $J(S) \subset S$
iii) $J(S \cap T) = J(S) \cap J(T)$

für alle $S, T \in \mathcal{P}(X)$.

a) Seien $S, T \in \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass

$$J(S) \subset J(T),$$

wenn $S \subset T$.

b) Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{T} := \{S \in \mathcal{P}(X) \mid S = J(S)\}$$

eine Topologie auf X ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Sei X eine nicht-leere Menge, und definieren Sie $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ durch

i) $\emptyset \in \mathcal{K}$,
ii) $U \subset X,\ X \backslash U$ ist endlich $\quad \Rightarrow \quad U \in \mathcal{K}$.

Kontrollieren Sie, dass $\mathcal{K}$ eine Topologie ist. Sie heißt die koendliche Topologie auf X. Bemerken Sie, dass $\mathcal{K}$ die diskrete Topologie auf X ist, genau dann wenn X endlich ist.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Gegeben eine Topologie $\mathcal{O}$ auf Y : was ist die gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass die Abbildung f stetig ist ?

b) Gegeben eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X : was ist die feinste Topologie $\mathcal{O}$ auf Y, sodass die Abbildung f stetig ist ?

(Sie müssen beweisen, dass die Menge $\mathcal{T}$ in a), und $\mathcal{O}$ in b) tatsächlich Topologien sind.)

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Sei X eine Menge und $\mathcal{S}, \mathcal{C}$ zwei Topologien auf X. Sei $\mathrm{Id}_X : X \to X$ die Identität, nämlich $\mathrm{Id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Id}_X : (X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{C})$ genau dann stetig ist, wenn $\mathcal{S}$ feiner als $\mathcal{C}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Id}_X : (X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{C})$ genau dann ein Homöomorphismus ist, wenn $\mathcal{S} = \mathcal{C}$.

c) Geben Sie ein Beispiel für stetige $\mathrm{Id}_X : (X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{C})$ an, bei dem $\mathrm{Id}_X : (X, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{C})$ nicht Homöomorphismus ist.

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Sei $\mathbb{Z}_+$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Definieren Sie $U \subset \mathbb{Z}_+$ als offen, wenn es die folgende Eigenschaft hat :

$$m \in U \ \ \& \ \ n|m \Rightarrow \ \ n \in U$$

a) Zeigen Sie, dass dies eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $\mathbb{Z}_+$ definiert und diese Topologie nicht die diskrete Topologie ist.

b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : (\mathbb{Z}_+, \mathcal{O}) \to (\mathbb{Z}_+, \mathcal{O})$ genau dann stetig ist, wenn

$$n|m \ \ \Rightarrow \ \ f(n)|f(m)$$