Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
28.4.2016

Topologie: Übungsblatt 3

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 5.5.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (8 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume, und

$$\pi_X \colon (X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y}) \to (X, \mathcal{T}) \quad \pi_Y \colon (X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y}) \to (Y, \mathcal{T}')$$

die Projektionsabbildungen, wobei $\mathcal{T}_{X\times Y}$ die Produkttopologie ist.

(i) Beweisen Sie, dass die Abbildungen π_X und π_Y offen sind.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_{X\times Y}$ die gröbste Topologie ist, so dass die Projektionsabbildungen π_X und π_Y stetig sind.

Aufgabe 2. (12 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $S \subset X$ eine Teilmenge.

(i) Zeigen Sie, dass der Abschluss von S, bezeichnet mit $\overline{S}$, genau $X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} S)$ ist, wobei

$$(X \overset{\circ}{\setminus} S)$$

das Innere von $X \setminus S$ bezeichnet.

(ii) Es sei $S \neq \emptyset$. Beweisen Sie, dass die folgende Bedingungen äquivalent sind :

a) $\overline{S} = X$.

b) $(X \overset{\circ}{\setminus} S) = \emptyset$.

c) $S \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{T}$.

d) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$, so dass $S \cap B \neq \emptyset$, für alle $B \in \mathcal{B}$.

Eine solche Teilmenge S, die die (äquivalenten) Bedingungen a) – d) erfüllt, heißt *dichte Menge* in $(X, \mathcal{T})$.

(iii) Beweisen Sie, dass $\partial(\mathring{S}) \subset \partial(S)$. Finden Sie ein Beispiel, so dass $\partial(\mathring{S}) \subsetneq \partial(S)$.

Aufgabe 3. (7 Punkte)

Es seien $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ und $S := \left\{\frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$. Beweisen Sie, dass

a) $\overline{S} = S \cup \{1\}$, falls $\mathcal{T} = \mathcal{E}$ die euklidische Topologie und

b) $\overline{S} = \mathbb{R}$, falls $\mathcal{T}$ die koendliche Topologie ist.

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $Z \subset X$ eine Teilmenge mit $|Z| = +\infty$. Beweisen Sie, dass $D(Z) \neq \emptyset$, d.h. Z besitzt einen Häufungspunkt.

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, wobei $\mathcal{E}$ die euklidische Topologie ist. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ nicht kompakt ist, d.h. finden Sie eine Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe 6. (8 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \mathcal{T}')$ ein Hausdorffraum, und $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ eine stetige Abbildung. Beweisen Sie, dass f im Allgemeinen nicht offen ist.