Die folgenden Aufgaben dürfen nur mit den Methoden der Vorlesung bearbeitet werden.

1. (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $(n+1)! > 2^{n+1}$ aus $n! > 2^n$ folgt, falls $n \geq 1$.
   (ii) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! > 2^n$?

2. Es sei (a_n) die Folge, definiert durch $a_n = n^2 - 5n + 1$. Man zeige, dass es zu jeder reellen Zahl K ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > K$ für alle $n > N$.

3. (i) Man untersuche für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} x^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n,$$

   wobei $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ für $m \geq k \geq 0$.

   (ii) Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}.$$

4. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Man zeige, dass es ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ gibt.

5. (i) Man beweise: $x < e^x$ und $\ln(x) < x$ für $x > 0$.
   (ii) Man bestimme den Grenzwert der Folge (a_n), definiert durch $a_n = \sqrt[n]{\ln(n)}$.

6. Es sei $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(m,n) = 2^m(2n+1)$, wobei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Man zeige, dass f bijektiv ist.

7. Man untersuche, ob die Folgen (a_n) konvergieren und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.
   (i) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n}$,
   (ii) $a_n = \sqrt[n]{2\alpha^n + \beta^n}$, wobei $\alpha, \beta > 0$.

8. Es seien $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(\frac{1}{2}) > g(\frac{1}{2})$. Man zeige, dass es ein nichtleeres Intervall $[a,b] \subset [0,1]$ gibt, so dass $f(x) > g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

9. Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die rationalen Zahlen auf die irrationalen Zahlen abbildet und umgekehrt?